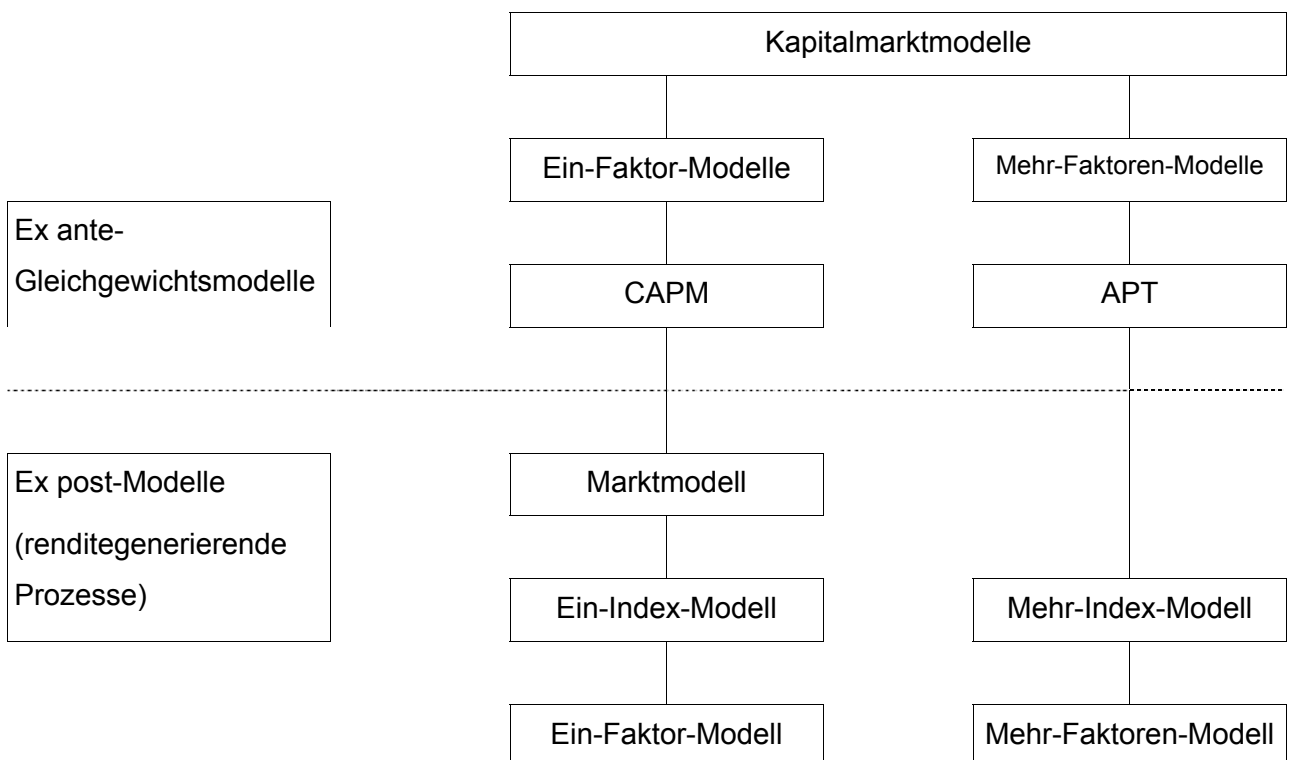


WERTPAPIERANALYSE UND KAPITALMARKTTHEORIE

Faktormodelle,
Marktmodell und
Arbitrage Pricing Theory

147



148

EIN-INDEX-MODELL UND EIN-FAKTOR-MODELL

Konstruktionsmerkmale von Faktor-Modellen

Erklärung der zukünftigen Rendite R_i einer Aktie i

- Allgemeiner Faktor bzw. mehrere allgemeine, d.h. für mehrere Aktien relevante Faktoren
 - Reaktionen auf allgemeine Faktoren sind unterschiedlich
 - Messung des Einflusses des systematischen Risikos auf aktuelle Rendite durch Sensitivitäten
- Idiosynkratischer Faktor ε_i
- *Faktor-Modelle für eine praktikable Lösung der Portefeuille-Planung*

149

Ein-Index-Modell (Single Index-Modell, Diagonal-Modell): Sharpe (1963)

$$(1) R_{it} = a_i + b_i \cdot I_t + \varepsilon_{it} \quad \text{mit} \quad b_i = \frac{\text{cov}(R_{it}, I_t)}{\text{var}(I_t)} = \frac{\sigma_{iI}}{\sigma_{I_t}^2}$$

- I_t Index, ε_{it} Störterm
- a_i vom Index unabhängige Komponente der Rendite; im Zeitablauf konstant
- b_i Faktorsensitivität; im Zeitablauf konstant

Spezifische Annahmen des Ein-Index-Modells

- $E(\varepsilon_{it}) = 0$ bei konstanter Varianz $\text{var}(\varepsilon_{it}) = \sigma_\varepsilon^2$
- $\text{cov}(\varepsilon_{it}, I_t) = 0$ (d.h. $\text{corr}(\varepsilon_{it}, I_t) = 0$)
- $\text{cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) = 0$ für alle $i \neq j$

150

Erwartete Rendite der Aktie i

$$(2) \quad \mu_i = E(R_i) = E(a_i + b_i \cdot I + \varepsilon_i) = E(a_i) + E(b_i \cdot I) + E(\varepsilon_i) = a_i + b_i \cdot E(I)$$

Varianz der Aktienrendite

$$\begin{aligned} \text{var}(R_i) &= \text{cov}(R_i, R_i) = \text{cov}(a_i + b_i \cdot I + \varepsilon_i, a_i + b_i \cdot I + \varepsilon_i) \\ (3) \quad &= b_i^2 \cdot \text{cov}(I, I) + 2 \cdot b_i \cdot \text{cov}(I, \varepsilon_i) + \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_i) \\ &= \underbrace{b_i^2 \cdot \text{var}(I)}_{\substack{\text{Indexbezogenes Risiko} \\ \text{Faktorrisiko}}} + \underbrace{\text{var}(\varepsilon_i)}_{\substack{\text{Idiosynkratisches /} \\ \text{Wertpapierbezogenes Risiko}} \end{aligned}$$

151

Portfolio-Rendite

$$\begin{aligned} (4) \quad R_p &= \sum_{i=1}^N x_i \cdot R_i = \sum_{i=1}^N x_i \cdot (a_i + b_i \cdot I + \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^N x_i \cdot a_i + \sum_{i=1}^N x_i \cdot b_i \cdot I + \sum_{i=1}^N x_i \cdot \varepsilon_i \\ &= a_p + b_p \cdot I + \varepsilon_p \end{aligned}$$

Erwartungswert der Portfolio-Rendite

$$(5) \quad \mu_p = a_p + b_p \cdot E(I)$$

152

Varianz der Portfolio-Rendite

$$(6) \quad \text{var}(R_p) = b_p^2 \cdot \text{var}(I) + \text{var}(\varepsilon_p) = \left(\sum_{i=1}^N x_i \cdot b_i \right)^2 \cdot \text{var}(I) + \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \text{var}(\varepsilon_i)$$

➤ *Eliminierung des wertpapierspezifischen Risikos bei guter Diversifikation*

Kovarianz zwischen Aktienrenditen

$$(7) \quad \begin{aligned} \text{cov}(R_i, R_j) &= \text{cov}(a_i + b_i \cdot I + \varepsilon_i, a_j + b_j \cdot I + \varepsilon_j) \\ &= b_i \cdot b_j \cdot \text{cov}(I, I) + b_i \cdot \text{cov}(I, \varepsilon_j) + b_j \cdot \text{cov}(I, \varepsilon_i) = b_i \cdot b_j \cdot \text{var}(I) \end{aligned}$$

153

Portfolio Selection nach Markowitz benötigt Schätzungen für ...	Ein-Index-Modell benötigt Schätzungen für ...
<ul style="list-style-type: none"> • risikoloser Zinssatz 1 • Erwartungswerte der Renditen N • Varianzen der Renditen N • Kovarianzen $(N^2 - N)/2$ 	<ul style="list-style-type: none"> • risikoloser Zinssatz 1 • Erwartungswert des Index 1 • Varianz des Index 1 • a_i für jedes Wertpapier N • b_i für jedes Wertpapier N • Varianzen der Störterme N
Summe $(N^2 + 3N + 2)/2$	Summe $3N + 3$

154

Übungsaufgabe: Schätzungsaufwand

Bestimmen Sie die Anzahl benötigter Schätzungen beim Ein-Faktor-Modell und bei der Portfolio Selection in den Fällen der folgenden Tabelle.

n	Portfolio Selection	Ein-Faktor-Modell
2	6	9
3		
4		
5		
10		
50		
100		
300		

155

Ein-Faktor-Modell

$$(8) R_{it} = \mu_{it} + b_i \cdot F_t + \varepsilon_{it}$$

$$(9) F_t = I_t - E(I_t)$$

➤ (9) als „Innovation“ mit $E(F_t) = 0$

156

MULTI-INDEX- UND MEHR-FAKTOREN-MODELLE

Multi-Index-Modell

$$(10) \quad R_{it} = a_i + b_{i1} \cdot I_{1t} + b_{i2} \cdot I_{2t} + \dots + b_{i\kappa} \cdot I_{\kappa t} + \varepsilon_{it}$$

Annahmen

- $E(\varepsilon_{it}) = 0$ bei konstanter Varianz $\text{var}(\varepsilon_{it}) = \sigma_\varepsilon^2$
- Renditeanteil a_i und Faktorsensitivitäten b_{ik} , $k = 1, \dots, \kappa$ sind in Zeit konstant
- $\text{cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) = 0$ für alle $i \neq j$
- $\text{cov}(\varepsilon_{it}, I_{kt}) = 0$ für alle i, k
- $\text{cov}(I_{mt}, I_{nt}) = 0$ für alle $m \neq n$ (Orthogonalität)

157

Erwartungswert der Rendite

$$(11) \quad \mu_i = E(R_i) = a_i + b_{i1} \cdot E(I_1) + \dots + b_{i\kappa} \cdot E(I_\kappa)$$

Varianz der Rendite

$$(12) \quad \text{var}(R_i) = b_{i1}^2 \cdot \text{var}(I_1) + \dots + b_{i\kappa}^2 \cdot \text{var}(I_\kappa) + \text{var}(\varepsilon_i)$$

Kovarianz zwischen den Renditen

$$(13) \quad \text{cov}(R_i, R_j) = b_{i1} \cdot b_{j1} \cdot \text{var}(I_1) + \dots + b_{i\kappa} \cdot b_{j\kappa} \cdot \text{var}(I_\kappa)$$

Mehr-Faktoren-Modell

$$(14) \quad R_{it} = \mu_i + b_{i1} \cdot F_1 + \dots + b_{i\kappa} \cdot F_\kappa + \varepsilon_{i,t} \quad \text{mit } F_k = I_k - E(I_k) \quad \text{und } E(F_k) = 0 \quad \text{für alle } k$$

158

Übungsaufgabe: Index-Modelle

(a) Angenommen, der rendite-erzeugende Prozess wird durch ein Ein-Index-Modell beschrieben: $R_i = a_i + b_i \cdot I + \varepsilon_i$

(a1) Erläutern Sie stichwortartig die Bedeutung der Symbole. Nennen Sie die spezifischen Annahmen eines Ein-Index-Modells (bzgl. Erwartungswert und Varianz des Störterms sowie bzgl. Kovarianzen zwischen Störtermen bzw. Kovarianzen zwischen Störterm und Index).

(a2) Bestimmen Sie die Standardabweichungen der beiden Wertpapiere A, B

$$R_A = 5\% + 0,8 \cdot I + \varepsilon_A, \quad R_B = 7\% + 1,2 \cdot I + \varepsilon_B, \quad \sigma_I = 18\%, \quad \sigma_{\varepsilon_A} = 25\%, \quad \sigma_{\varepsilon_B} = 15\%$$

159

(a3) Aus den Wertpapieren wird zu gleichen Teilen ein Portefeuille gebildet. Wie hoch sind die Werte für a_P und b_P ? Bestimmen Sie das Gesamtrisiko des Portefeuille.

(b) Gehen Sie nun davon aus, dass der rendite-erzeugende Prozess durch ein Zwei-Index-Modell beschrieben wird. Leiten Sie für das Index-Modell mit 2 Indizes unter den für Multi-Index-Modellen üblichen Annahmen die Zerlegung der Varianz der Wertpapier-Rendite in ein indexbezogenes und ein idiosynkratisches Risiko her. An welchen Stellen nutzen Sie welche Annahmen?

160

Übungsaufgabe: Zwei-Faktor-Modell

Für eine Aktie wird eine Rendite von $\mu_i = 4\%$ erwartet. Die für das kommende Jahr geschätzte Wachstumsrate des Brutto-Sozialproduktes sei 3,5 %, für das Zinsniveau wird keine Änderung erwartet. Brutto-Sozialprodukt und Zinsniveau sind gleichzeitig die für die Aktie einzig relevanten (systematischen) Faktoren. Die Sensitivitäten der betrachteten Aktie sollen $b_B = 1,2$ und $b_Z = -0,8$ betragen. Im Laufe des Jahres tritt nun folgende Situation ein: Das BSP steigt tatsächlich nur um 2 %, das Zinsniveau fällt aber um 2 %. Schließlich werden über das betrachtete Unternehmen positive Nachrichten bekannt, die mit 3 % zur aktuellen Rendite der Aktie beitragen. Berechnen Sie die Rendite der Aktie nach dem Zwei-Faktor-Modell.

161

BESTIMMUNG DER SENSITIVITÄTEN UND FAKTOREN

Sensitivitäten

- Historische Aktienkurse bzw. –renditen
- Univariate bzw. multivariate Regression

Bestimmung der relevanten Faktoren, Anzahl relevanter Faktoren

- Statistische Identifikation (Faktorenanalyse, Hauptkomponentenanalyse)
- Identifikation durch ökonomische Hypothesen
- Vorabspezifikation von Indizes und Faktoren
 - Aktienindex als Proxy für Markt-Portfolio
 - Makroökonomische Variablen; Branchen- oder Industriefaktoren

162

Empirie und Praxis am US-Markt

- Chen/Roll/Ross (1986) finden ...
 - Änderung der erwarteten Inflationsrate
 - Nicht-antizipierte Inflationsrate
 - Nicht-antizipierte Änderung der Zinsstruktur
 - Nicht-antizipierte Änderung der Risikoprämien zwischen festverzinslichen Wertpapieren guter und schlechter Bonität
 - Nicht-antizipierte Änderung der erwarteten Industrieproduktion
- Fama/French (1992) untersuchen ...
 - Markt-Beta-Faktor
 - Unternehmensgröße
 - Kurs-Gewinn-Verhältnis
 - Verschuldungsgrad
 - Kurswert-Buchwert-Verhältnis

163

DAS MARKTMODELL

Standardform des Marktmodells

$$(15) \quad R_{it} = \alpha_i + \beta_i \cdot R_{Mt} + \varepsilon_{it}$$

- Marktmodell als empirisch nachprüfbar Form des CAPM
- Graphische Darstellung des Marktmodells als charakteristische Linie
- Es gilt $\sum_j x_j \cdot \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\varepsilon_i, r_M) &= \text{cov}(\varepsilon_i, \sum_j x_j \cdot r_j) = \sum_j x_j \cdot \text{cov}(\varepsilon_i, r_j) = \sum_j x_j \cdot \text{cov}(\varepsilon_i, \alpha_j + r_M \cdot \beta_j + \varepsilon_j) \\ &= \sum_j x_j \cdot \beta_j \cdot \text{cov}(\varepsilon_i, r_M) + \sum_j x_j \cdot \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \end{aligned}$$

Übungsaufgabe: Index-Modell und Marktmodell

164

Zeigen Sie, daß bei Gültigkeit eines Ein-Index-Modells alle Kovarianzen σ_{ij} der Renditen eines Wertpapiers i mit den Renditen der anderen Wertpapiere j gleich Null sind, wenn die Korrelation zwischen der Rendite r_i und dem Index gleich Null ist, Warum gilt dies nicht beim Marktmodell?

165

Varianz der Rendite (analog zu (3))

$$(16) \quad \underbrace{\text{var}(\mathbf{R}_i)}_{\text{Gesamtrisiko}} = \beta_i^2 \cdot \text{var}(\mathbf{R}_M) + \text{var}(\varepsilon_i) = \underbrace{\beta_i^2 \cdot \text{var}(\mathbf{R}_M)}_{\text{Systematisches Risiko}} + \underbrace{\text{var}(\varepsilon_i)}_{\text{Unsystematisches Risiko}}$$

Diversifikation führt zur Eliminierung des unsystematischen Risikos (vgl. (6))

$$(17) \quad \text{var}(\mathbf{R}_P) = \beta_P^2 \cdot \text{var}(\mathbf{R}_M) + \text{var}(\varepsilon_P) = \left(\sum_i x_i \cdot \beta_i \right)^2 \cdot \text{var}(\mathbf{R}_M) + \sum_i x_i^2 \cdot \text{var}(\varepsilon_i)$$

166

ZUSAMMENHANG ZWISCHEN MARKTMODELL UND CAPM

Charakteristika

- CAPM als ex ante-Modell, Marktmodell als ex post-Modell
- CAPM einperiodig, Marktmodell geschätzt über Zeitreihenregression
- CAPM Gleichgewichtsmodell
- Unterschied im systematischen Risiko nur durch Quadrierung
- Diversifikation eliminiert das unsystematische Risiko
- Im CAPM bewertetes Kovarianzrisiko wird durch (Regressions-) Zusammenhang des Marktmodells erklärt
- Problem der praktischen Umsetzung: Markt-Portfolio und Marktrendite nicht bekannt

167

Kompatibilität von CAPM und Marktmodell bedingt ...

- Rendite-erzeugender Prozess des Marktes entspricht Marktmodell
 - Anleger mit rationalen Erwartungen
 - Renditen unabhängig und identisch verteilt
-
- *Aus Marktmodell geschätztes Beta stimmt mit Beta des CAPM überein*
 - *Beta-Faktor ist über den Untersuchungszeitraum stabil*
 - *Ex post-ermittelte Mittelwerte der Renditen entsprechen den ex ante-erwarteten Renditen*

168

Erwartungswert der Wertpapierrendite beim Marktmodell

$$(18) \quad \mu_i = \alpha_i + \beta_i \cdot \mu_M$$

$$\mu_i - R_f = \alpha_i + \beta_i \cdot \mu_M - R_f + \beta_i \cdot R_f - \beta_i \cdot R_f = \alpha_i - (1 - \beta_i) \cdot R_f + \beta_i \cdot (\mu_M - R_f)$$

Bedingung für Identität zwischen Marktmodell und CAPM

$$(19) \quad \alpha_i = (1 - \beta_i) \cdot R_f$$

169

Übungsaufgabe: Marktmodell

Folgende Schätzungen für den Index M sowie für die Aktien A und B wurden mit der Überschussrendite-Version des Marktmodells ermittelt:

$$\text{var}(R_M) = 0,01 \quad \text{var}(R_A) = 0,1024 \quad \text{corr}(R_A, R_M) = 0$$

$$\alpha_A = 0,03 \quad \alpha_B = -0,01 \quad \beta_B = 1,4$$

$$\text{var}(\varepsilon_B) = 0,0064$$

- Wie hoch ist das unsystematische Risiko der Aktie A?
- Wie hoch sind das unsystematische Risiko und der Alphaswert eines Portefeuille, das zu 25% aus Aktie A und zu 75% aus Aktie B besteht?
- Wie hoch sind das systematische Risiko der Aktie B und die Korrelation zwischen den Renditen der Aktie B und des Marktes?

170

- (d) Skizzieren Sie die Security Market Line des CAPM und tragen Sie in das Diagramm anhand der Werte für die jeweiligen Alphas und Betas die Lage der Aktien A und B sowie des Marktportefeuille ein. Geben Sie die Achsenbezeichnungen an.
- (e) Nehmen Sie an, dass die Varianz der Rendite der Aktie A aus 256 täglichen Renditen berechnet und dann nach der üblichen Methode annualisiert wurde. Außerdem soll das hier betrachtete Kalenderjahr auch 256 Börsentage besitzen. Wie hoch ist die ursprünglich ermittelte Standardabweichung auf Basis täglicher Renditen.

171

Übungsaufgabe: Systematisches und unsystematisches Risiko

- (a) Leiten Sie für die Rendite $R_i = \alpha_i + \beta_i \cdot R_M + \varepsilon_i$ einer Aktie i mit $E(\varepsilon_i) = 0$ den formalen Zusammenhang zwischen Gesamtrisiko (Varianz der Rendite), systematischem und unsystematischem Risiko ab.
- (b) Wie hoch ist der Wert $\text{Cov}(R_i, R_M)$, wenn das unsystematische Risiko der Aktie gleich Null ist?
- (c) Leiten Sie für die Rendite R_P eines Portefeuille P von Aktien mit den in (a) beschriebenen Renditen den formalen Zusammenhang zwischen Gesamtrisiko (Varianz der Portefeuille-Rendite), systematischem und unsystematischem Portefeuille-Risiko ab.

172

SCHÄTZUNG UND PROGNOSE DES BETA-FAKTORS

Variationsmöglichkeiten bei der Schätzung des Beta-Faktors

- Wahl des Schätzverfahrens
- Prozentrenditen oder logarithmierte Renditen
- Wahl der Ersatzgröße für R_M
- Wahl der Länge der Schätzperiode

Prognose des Beta-Faktors

- Branchen-Betas
- Fundamentale Beta-Werte

173

Dax		Deutscher Aktienindex		4433,87		
Dax-K.		Dax-Kursindex		3490,76		
Kennzahlen						
Kür- zel	Volatilität, p.a. %		Korrelation		Beta 250 Tage	Faktor
	30 Tage	250 Tage	30 Tage	250 Tage		
DAX	43,39	27,94	1,0000	1,0000	1,0000	
ADS	58,25	41,04	0,6901	0,5874	0,8629	2,50981
ALV	46,12	36,53	0,8657	0,7778	1,0170	13,54267
BAS	43,29	34,42	0,8136	0,7934	0,9776	34,70618
BAY	50,12	36,71	0,7930	0,7775	1,0216	40,42004
BMW	103,06	55,84	0,5724	0,6648	1,3287	1,42440
BVM	73,35	42,41	0,7265	0,6575	0,9980	21,78578
CBK	56,05	36,37	0,8614	0,7657	0,9969	26,63697
DAI	59,84	40,45	0,6780	0,7120	1,0309	32,12669
DBK	56,73	37,10	0,8593	0,7784	1,0338	29,54087
DGS	53,15	39,59	0,4075	0,5470	0,7752	5,09494
DRB	58,50	41,88	0,7386	0,7256	1,0877	30,26113
DTE	56,55	32,75	0,8227	0,5885	0,6899	55,34399
HEN3	62,66	43,59	0,7289	0,6872	1,0721	8,07946
HCE	60,32	42,07	0,8518	0,6694	1,0081	32,53970
KAR	48,74	37,07	0,4868	0,5235	0,6947	0,46489
LHA	58,38	42,39	0,7567	0,6553	0,9944	21,11927
LIN	43,65	37,68	0,6139	0,6364	0,8582	0,46519
MAN	61,58	39,53	0,6721	0,6637	0,9391	0,85340
MEO	42,75	41,15	0,6726	0,6345	0,9347	14,70828
MMN	686,55	241,49	0,2709	0,2486	2,1489	21,54823
MUV2	57,04	42,74	0,8429	0,7621	1,1658	4,93031
PRS	47,12	33,96	0,6540	0,5400	0,6565	0,89278
RWE	50,89	35,05	0,7652	0,6769	0,8493	30,73265
SAP3	80,24	45,45	0,8440	0,7216	1,1750	5,82495
SCH	39,91	34,60	0,7472	0,6986	0,8652	3,78232
SIE	49,78	40,05	0,6844	0,6928	0,9933	32,41090
THY	41,48	29,89	0,8057	0,7366	0,7882	1,89830
VEB	48,54	33,12	0,7488	0,6980	0,8274	27,82639
VIA	59,12	37,18	0,8068	0,6331	0,8424	1,47296
VOW	692,88	243,84	0,2703	0,2560	2,2347	23,47932

Gültig 21.09.98

Quelle: Deutsche Börse AG (Ohne Gewähr)

174

Übungsaufgabe: Systematisches und unsystematisches Risiko

Berechnen Sie anhand der Angaben in den tabellierten Beta-Werten des obigen Abschnitts das systematische und das unsystematische Risiko und das gesamte Risiko der Aktien HypoVereinsbank (BVM), Daimler (DAI) und Siemens (SIE) auf 250-Tage-Basis.

175

Übungsaufgabe: Marktmodell

Mit der Standardform des Marktmodells $R_{it} = \alpha_i + \beta_i \cdot R_{Mt} + \varepsilon_{it}$ werden die nachfolgend angegebenen Werte für den Alpha-Faktor, den Beta-Faktor, für die Varianz der Aktienrendite und für die Korrelation zwischen Aktien- und Marktrendite geschätzt. Als Ersatzgröße für die Marktrendite wird die Rendite des Aktienindex FIBA verwendet. Es wird angenommen, daß die geschätzten Werte auch für die Zukunft gelten. Der Index FIBA enthält neben den Aktien A bis D weitere Wertpapiere, deren Daten für die Aufgabe irrelevant sind.

- a) Geben Sie ohne Berechnung die in der Tabelle mit einem Fragezeichen versehenen Werte für den Aktienindex FIBA an.
- b) Berechnen Sie die in der Tabelle fehlenden Werte für die Aktie A.

176

- c) Sie sollen den Index FIBA mit zwei Aktien nachbilden („tracken“). Dazu stehen Ihnen die Aktien B, C und D zur Verfügung. Leerverkäufe der Aktien sind nicht möglich. Worauf achten Sie beim Index Tracking in Bezug auf Beta-Faktor und unsystematisches Risiko? Welche zwei Aktien nehmen Sie in Ihr Portfolio auf? Wie groß müssen die Anteile der einzelnen Wertpapiere in dem Portfolio sein? Wie hoch ist das unsystematische Risiko dieses Portfolio?
- d) Welche der beiden Aktien C und D hat einen höheren Erwartungswert der Rendite? Begründen Sie ohne Berechnung kurz Ihre Aussage.

177

Aktie	Alpha	Beta	Varianz	Syst. Risiko	Unsys. Risiko	Korrelation
FIBA	?	?	0,0100	?	?	?
A	0,01	?	0,0400	?	?	0,500
B	0,05	0,8	0,0400	0,0064	0,0336	0,400
C	-0,04	1,2	0,0256	0,0144	0,0112	0,750
D	0,03	1,2	0,1024	0,0144	0,0880	0,375
...

178

ARBITRAGE PRICING THEORY APT

Arbitrage Pricing Theory APT von Ross (1976)

- Alternatives Bewertungsmodell zum CAPM
- Keine Arbitrage-Möglichkeiten: Investments mit identischem Risiko müssen identischen Preis besitzen

Zentrale Bewertungsgleichung der APT

$$(20) \quad E(R_i) = \mu_i = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot b_{i1} + \dots + \lambda_k \cdot b_{ik}$$

mit rendite-erzeugendem Prozess eines Faktormodells gemäß (14), d.h.

$$R_{it} = \mu_i + b_{i1} \cdot F_1 + \dots + b_{ik} \cdot F_k + \varepsilon_{i,t} \quad \text{mit} \quad E(F_k) = 0 \quad \text{für alle } k$$

179

Weitere Annahmen der APT

- Annahmen der Indexmodelle
 - Gemeinsame Faktoren (also bspw. keine Unternehmenskennzahlen)
 - Anzahl der Wertpapiere N größer als Anzahl der Faktoren k
 - Atomistische Nachfragestruktur
 - Rationale Anleger mit positivem Grenznutzen
 - Homogene Erwartungen bezüglich Anzahl, Art und Erwartungswert der Faktoren.
 - Vollkommener Kapitalmarkt
- *Kapitalmarkt ist arbitragefrei*

180

Arbitrage-Portefeuille

(a) Summe der Anteile x_i gleich Null („Selbstfinanzierend“)

$$\sum_{i=1}^N x_i = 0$$

(b) Portefeuille-Sensitivitäten bezüglich der Faktoren gleich Null („Portefeuille frei von systematischem Risiko“)

$$b_{Pk} = \sum_{i=1}^N x_i \cdot b_{ik} = 0 \quad \text{für alle } k = 1, \dots, \kappa$$

(c) Idiosynkratisches Risiko gleich Null

$$\varepsilon_P = \sum_{i=1}^N x_i \cdot \varepsilon_i = 0$$

181

Übungsaufgabe: Arbitrage-Portefeuille im APT

Bestimmen Sie die Rendite des Arbitrage-Portefeuille

$$\begin{aligned} r_{P0} &= E(r_{P0}) + b_{P1} \cdot F_1 + \dots + b_{P\kappa} \cdot F_\kappa + \varepsilon_P \\ &= E(r_{P0}) = \sum_{i=1}^N x_i \cdot \mu_i = 0 \end{aligned}$$

182

Zero-Beta-Portefeuille

- Sensitivität gegenüber allen Faktoren gleich Null: $b_{ik} = 0$ für alle k
- Summation der Anteile gleich Eins
- Bewertungsgleichung: $\mu_i = \lambda_0$
- Kein systematisches bzw. faktorbezogenes Risiko und nach Annahme kein (bzw. fast kein) idiosynkratisches Risiko
- Risikoloses Portefeuille

$$\lambda_0 = R_f$$

- *APT nimmt nicht die Existenz eines risikolosen Zinses an, sondern dessen Existenz folgt aus den Annahmen der APT*

183

Faktor-Portefeuilles

- Sensitivität bezüglich eines Faktors gleich Eins; Sensitivität bezüglich der anderen Faktoren gleich Null
- Faktor-k-Portefeuille mit Bewertungsgleichung

$$\mu_{Pk} = \lambda_0 + \lambda_k \cdot b_{Pk} = R_f + \lambda_k$$

$$\Rightarrow \lambda_k = \mu_{Pk} - R_f$$

- λ_k erwartete Überschussrendite der Faktor-k-Portefeuilles über risikolosen Zins (Risikoprämie des Faktor-k-Portefeuille)
- Alternative Notierung der Bewertungsgleichung (20)

$$E(R_i) = \mu_i = r_f + b_{i1} \cdot (\mu_{P1} - R_f) + \dots + b_{ik} \cdot (\mu_{Pk} - R_f)$$

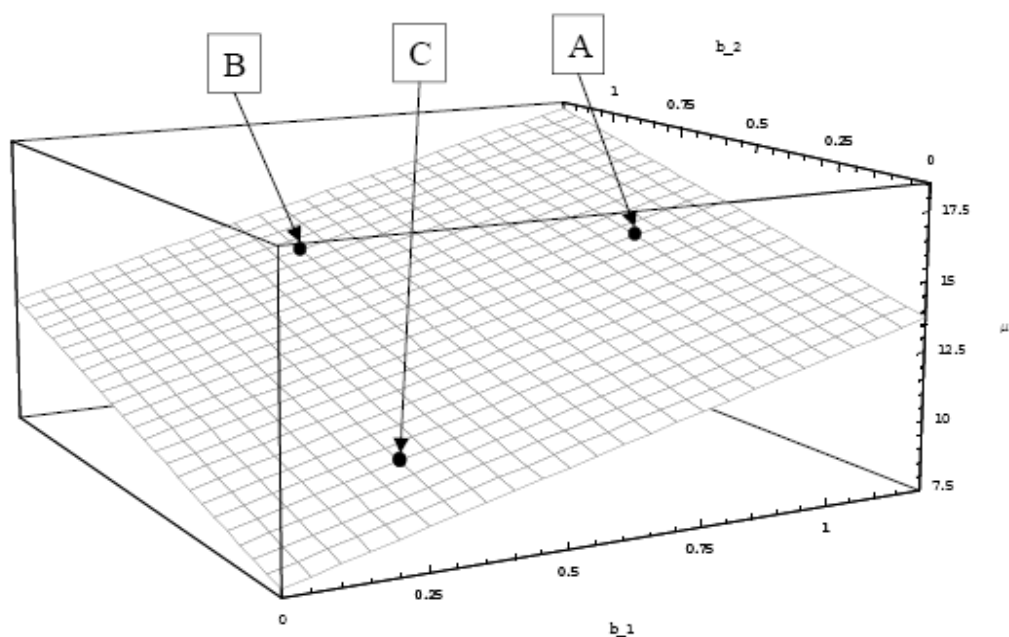
184

Übungsaufgabe: Faktor-k-Portefeuilles

Portfolio	μ	b_1	b_2
A	15%	1	0,6
B	14%	0,5	1
C	10%	0,3	0,2

- (a) Geben Sie die jeweiligen rendite-erzeugenden Prozesse an.
- (b) Bestimmen Sie durch Aufstellung und Lösung eines Gleichungssystems die Fläche im 3-dimensionalen μ - b_1 - b_2 -Raum, auf der bei Arbitrage-Freiheit alle Portfolios liegen.
- (c) Bestimmen Sie das Faktor-1-Portefeuille und die erwartete Rendite des Faktor-1-Portefeuille.

185



186

Übungsaufgabe: Faktor-k-Portefeuilles

Betrachtet werden Faktor-Portefeuilles mit 3 Wertpapieren und 2 Faktoren mit den nachfolgend angegebenen Sensitivitäten.

	b_{i1}	b_{i2}
WP1	-0,40	1,75
WP2	1,60	-0,75
WP3	0,67	-0,25

187

- Zeigen Sie, durch welche Anlage in WP1, WP2 und WP3 ein Faktor-1-Portefeuille realisiert werden kann.
- Zeigen Sie, durch welche Anlage in WP1, WP2 und WP3 ein Faktor-2-Portefeuille realisiert werden kann.
- Berechnen Sie die Risikoprämien der Faktor-Portefeuilles, wenn die Erwartungswerte des Faktor-1- bzw. Faktor-2-Portefeuille 16,6 bzw. 13,4 bei einem risikolosen Zinssatz von 7% betragen.
- Berechnen Sie die erwartete Rendite des Wertpapiers WP1.

188

PASSIVES PORTFOLIO MANAGEMENT

- Index-Nachbildung mit wenigen Aktien (Index Tracking)
- Abweichung der Portefeuille-Rendite von der Index-Rendite (Tracking Error)
- Optimierung mit Index-Modell

AKTIVES PORTFOLIO MANAGEMENT

- Market Timing und/oder Stock Picking (Selektion)
- Erwartung eines steigenden Marktes führt zu Erhöhung des Portfolio-Beta
- Erwartung eines fallenden Marktes führt zu Verringerung des Portfolio-Beta

189

Übungsaufgabe: Tracking des DAX

	Volatilität 250 Tage	Korrelation 250 Tage	Beta 250 Tage
DAX	24,84%	1,0000	1,0000
BAS	31,40%	0,8203	1,0370
BMW	39,61%	0,7600	1,2120
RWE	32,15%	0,6962	0,9011

Ein Anleger möchte den DAX approximativ, aber möglichst exakt mit ein oder zwei Aktien nachbilden („tracken“). In der Zeitung findet er für den 4.2.1998 Angaben über Volatilitäten und Beta-Werte.

- (a) Bestätigen (d.h. ermitteln) Sie für BAS den angegebenen Beta-Wert durch eine Rechnung aus der angegebenen Volatilität und der Korrelation.
- (b) Berechnen Sie das unsystematische Risiko von BAS.

190

- (c) Worauf ist beim Index-Tracking (Beta, unsystematisches Risiko) zu achten ?
- (d) Der DAX soll nur über eine einzelne Aktie nachgebildet werden. Sollte der Anleger eher BAS, BMW oder eher RWE zum Tracken des DAX kaufen?
- (e) Der DAX soll nun über zwei Aktien (keine Leerverkäufe) reproduziert werden. Begründen Sie, welche der Kombinationen BAS/RWE oder BMW/RWE vorzuziehen ist. Wie groß sind die Wertpapieranteile im Tracking-Portefeuille?

191

ERGÄNZENDE LITERATURHINWEISE ZU FAKTORMODELLE. MARKTMODELL UND ARBITRAGE PRICING THEORY

Faktormodelle und APT sind ausführlich enthalten bspw. in
Albrecht, Peter / Maurer, Raimond (2005) Investment- und Risikomanagement, 2. Auflage, Stuttgart
Elton, Edwin J. / Gruber, Martin J. (2003) Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 6th ed., New York et al.
Sharpe, William F. / Alexander, Gordon J. / Bailey, Jeffrey V. (1999) Investments, 6th ed., Englewood Cliffs, N.J.
Steiner, Manfred / Bruns, Christoph (2002) Wertpapiermanagement, 8. Auflage, Stuttgart
Steiner, Peter / Uhlir, Helmut (2000) Wertpapieranalyse, 4. Auflage, Heidelberg

Siehe weiter – auch wie zitiert –

Chen, Nai-fu / Roll, Richard / Ross, Stephen A. (1986) Economic Forces and the Stock Market, *Journal of Business* 59, S. 383-403
Fama, Eugene F. / French, Kenneth R. (1992) The Cross-Section of Expected Stock Returns, *Journal of Finance* 47, S. 427-465

192

- Franke, Günter (1984) On Tests of the Arbitrage Pricing Theory, OR Spektrum 6, S. 109-117
- Kruschwitz, Lutz / Löffler, Andreas (1997a) Ross' APT ist gescheitert. Was nun?, Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 49, S. 644-651
- Kruschwitz, Lutz / Löffler, Andreas (1997b) Mors certa, hora incerta (Erwiderung auf die Stellungnahme von Manfred Steiner und Martin Wallmeier), Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 49, S. 1089-1090
- Ross, Stephen A. (1976) The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, Journal of Economic Theory 13, S. 341-360
- Rudolph, Bernd (1979) Zur Theorie des Kapitalmarktes – Grundlagen, Erweiterungen und Anwendungsbereiche des Capital Asset Pricing Model (CAPM), Zeitschrift für Betriebswirtschaft 49, S. 1034-1067
- Sharpe, William F. (1963) A Simplified Model for Portfolio Analysis, Management Science 9, S. 277-293
- Steiner, Manfred / Wallmeier, Martin (1997) Totgesagte leben länger! (Anmerkungen zum Beitrag „Ross' APT ist gescheitert. Was nun?“ von Lutz Kruschwitz und Andreas Löffler), Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 49, S. 1084-1088
- Zimmermann, Peter (1997) Schätzung und Prognose von Betawerten. Eine Untersuchung am deutschen Aktienmarkt, Bad Soden/Ts.

WERTPAPIERANALYSE UND KAPITALMARKTTHEORIE

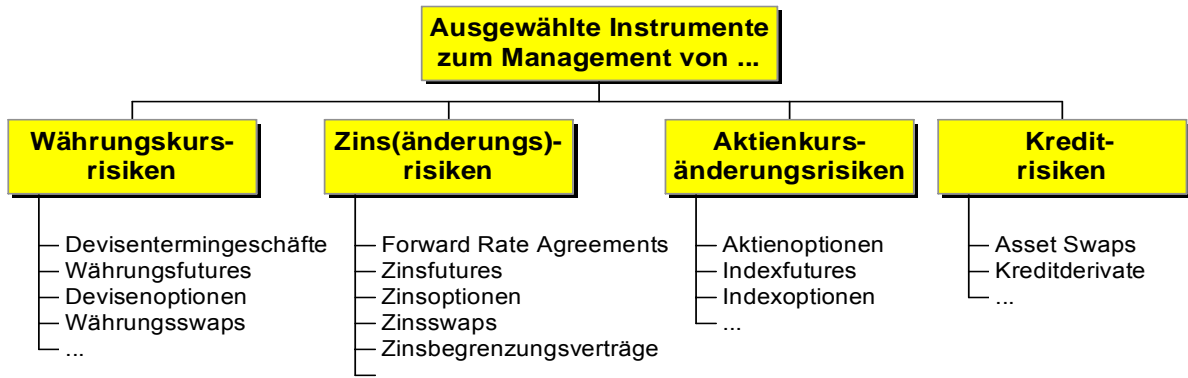
Bewertung
derivativer
Finanzinstrumente

195

DERIVATE UND TERMINGESCHÄFTE

- Ein derivatives (= abgeleitetes) Finanzinstrument - kurz: Derivat - ist ein im Wert (Preis) von der Entwicklung anderer originärer, synthetischer oder derivativer Finanzinstrumente, Währungen, Referenzzinssätze oder Indizes abhängig und wesentlich durch ein auf die Zukunft gerichtetes Vertrags-element gekennzeichnet.
- Ein Termingeschäfte ist eine Vereinbarung über den tatsächlichen oder durch Differenzzahlungen substituierbaren bedingten oder unbedingten Kauf, Verkauf oder Tausch genau bestimmter Gegenstände (Finanzinstrumente) zu einem späteren Termin, aber zu einem bereits im vorhinein festgelegten Preis.
- Ein Optionsgeschäfte ist eine Vereinbarung, aus der der Käufer der Option das Recht erwirbt, vom Verkäufer eine bestimmte vertraglich vereinbarte Leistung zu im vorhinein bestimmten Konditionen zu verlangen.

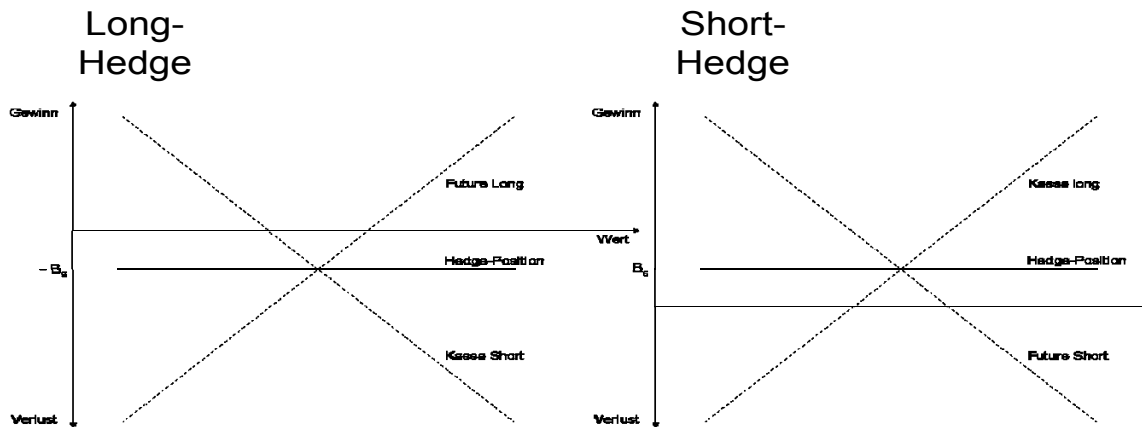
196



FORWARDS / FUTURES

Ein unbedingtes Termingeschäft beinhaltet die verbindliche Vereinbarung über

- die Lieferung (Verkäufer) bzw. die Abnahme (Käufer)
- der Menge eines bestimmten Finanztitels (Basiswert, Basisobjekt)
- zu einem im voraus festgelegten Preis (Preis des Termingeschäfts, Future-Preis, Forward-Preis) und
- zu einem späteren Zeitpunkt (Liefertag)
- Unbedingtes Termingeschäft an der Börse = Terminkontrakt = Future
- Unbedingtes außerbörsliches Termingeschäft = Forward



OPTIONEN

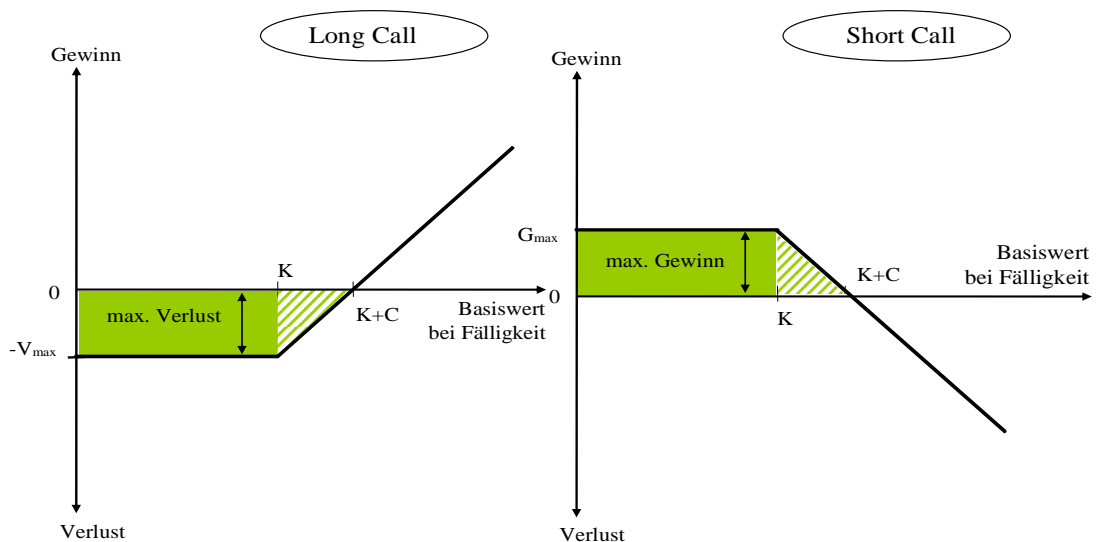
Eine Option ist das Recht,

- zum Kauf (Kaufoption, Call) oder zum Verkauf (Verkaufsoption, Put)
- einer fixierten Menge eines fixierten Gutes (Basiswert, Basisobjekt, Underlying)
- zu einem fixierten Preis (Basispreis, Ausübungspreis)
- an einem oder bis zu einem fixierten zukünftigen Zeitpunkt (Fälligkeit).
- Käufer der Option (Inhaber, Long Option-Position) zahlt Optionsprämie
- Verkäufer (Stillhalter, Short Option-Position) erhält Optionsprämie
- europäische versus amerikanische Option
- Ausüben der Option, Verfall der Option

	Kaufoption (Call)	Verkaufsoption (Put)
Käufer (zahlt Prämie, Entscheidungsrecht, aktiv)	Optionsinhaber: Recht auf Bezug des Optionsgegenstandes	Optionsinhaber: Recht auf Abgabe des Optionsgegenstandes
Verkäufer (erhält Prämie, Verpflichtung, passiv)	Stillhalter im Optionsgegenstand: Pflicht, ggf. den Optionsgegenstand zu verkaufen	Stillhalter in Geld: Pflicht, ggf. den Optionsgegenstand zu kaufen

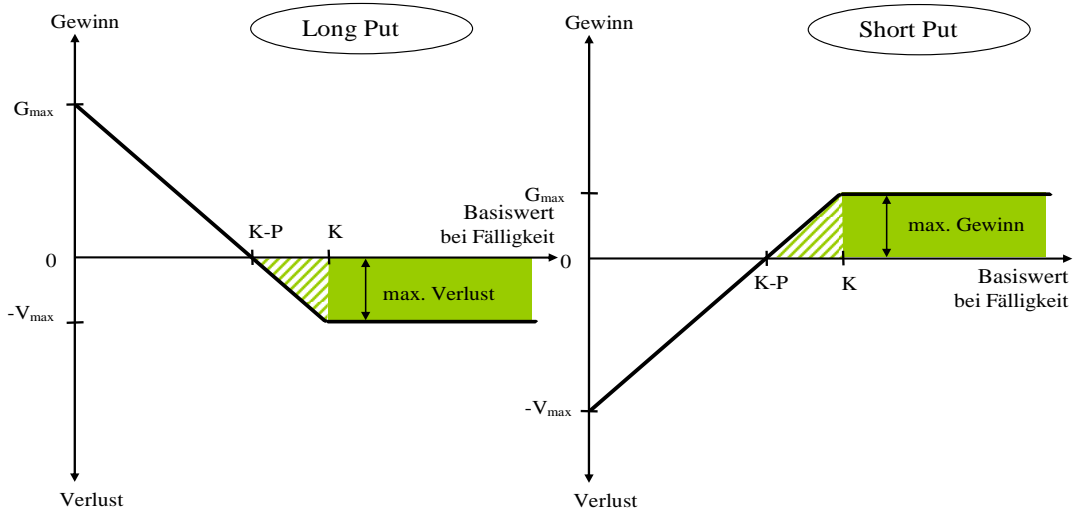
201

Abb. Grundpositionen in Calls



202

Abb. Grundpositionen in Puts



203

	Restlaufzeit < 1 Jahr	1 < Restlaufzeit < 5 Jahre	Restlaufzeit > 5 Jahre	Nominalbetrag insgesamt	Netto-Marktwert
Zinsbezogene Geschäfte	4.787.050	3.182.430	2.518.523	10.488.003	1.573
OTC-Produkte					
FRAs	852.774	57.124	23	909.921	-114
Zins-Swaps	2.577.291	2.372.353	1.938.660	6.888.304	1.717
Zinsoptionen-Käufe	154.642	396.240	276.128	827.010	16.320
Zinsoptionen-Verkäufe	154.965	356.620	303.712	815.297	-16.015
Börsengeh. Produkte					
Zins-Futures	641.346	93	0	641.439	-321
Zinsoptionen-Käufe	85.628	0	0	85.628	11
Zinsoptionen-Verkäufe	320.404	0	0	320.404	-25
Währungsbezogene Geschäfte	2.214.429	203.673	101.140	2.519.242	4.622
OTC-Produkte	2.205.782	202.605	101.127	2.509.514	4.622
Börsengeh. Produkte	8.647	1.068	13	9.728	0
Aktien-/Indexbezogene Geschäfte	205.993	242.063	50.666	498.722	-455
OTC-Produkte	115.709	222.546	50.650	388.905	-332
Börsengeh. Produkte					
Aktien-/Index-Futures	575	0	0	575	-344
Aktien-/Indexoptionen-Käufe	44.383	9.567	0	53.950	3.958
Aktien-/Indexoptionen-Verkäufe	45.326	9.950	16	55.292	-3.737
Warenbezogene Geschäfte	30.443	23.981	3.805	58.229	909
OTC-GESCHÄFTE INSGESAMT	6.086.951	3.631.366	2.674.105	12.392.422	7.104
BÖRSENGEH. GESCHÄFTE INSGES.	1.150.964	20.781	29	1.171.774	-455

Tabelle: Derivate-Positionen der Deutsche Bank AG; 31.12.01 in Mio EUR

204

Kategorie	Derivat
Euro-Geldmarktprodukte	Dreimonats-EURIBOR-Futures Optionen auf Dreimonats-EURIBOR-Futures Einmonats-EONIA-Futures
Euro-Kapitalmarktprodukte	Euro-SCHATZ-Futures, Optionen auf Euro-SCHATZ-Futures Euro-BOBL-Futures, Optionen auf Euro-BOBL-Futures Euro-BUND-Futures, Optionen auf Euro-BUND-Futures Euro-BUXL-Futures CONF-Futures Delta-neutrale Handelsprodukte
Aktienprodukte	Aktienoptionen auf deutsche, schweizerische, finnische, französische, holländische, italienische, USamerikanische Basiswerte Low Exercise Price-Aktienoptionen LEPOs
Aktienindexprodukte	DAX-Futures und –Optionen NEMAX-Futures und –Optionen TecDAX-Futures sowie –Optionen SMI-Futures und –Optionen HEX25-Futures und –Optionen Dow Jones Italy Titans 30-Futures Dow Jones Euro STOXX 50-Futures und –Optionen Dow Jones STOXX 50-Futures und –Optionen Dow Jones Euro STOXX-Branchen-Futures und -Branchen-Optionen Dow Jones STOXX 600-Branchen-Futures und -Branchen-Optionen Dow Jones Global Titans 50-Futures und –Optionen Delta-neutrale Handelsprodukte
Exchange Traded Fund EXTF-Derivate	EXTF-Futures und –Optionen

Tabelle: Produkte der EUREX European Exchange

205

Einsatzmotive

- Finanzderivate sind Instrumente, mit denen Wirtschaftssubjekte ihre Risikopositionen entsprechend ihrer individuellen Ausgangspositionen, ihrer Erwartungen und Risikopräferenzen schnell und mit geringen Transaktionskosten gestalten oder umgestalten können.
 - Hedging
 - Spekulation, Trading
 - Arbitrage
- Kauf oder Verkauf der Basistitel kann insbesondere bei kurzfristig orientierten Transaktionen verschiedene Nachteile aufweisen:
 - Transaktionskosten, Verschuldungsnotwendigkeiten
 - Kauf oder Verkauf der Basistitel mit weiteren Beschränkungen verbunden

206

Trennung von Risiko und Liquidität

Deutsche Bundesbank (1994), S. 44:

*Die zentrale ökonomische Funktion derivativer Instrumente besteht in einer isolierten **Bewertung, Bündelung und Weitergabe von Marktpreisrisiken.***

*Die Verwendung von Derivaten ermöglicht im Unterschied zu klassischen Risikotransfergeschäften und -techniken eine Steuerung der individuellen Risikoposition mit geringem Mitteleinsatz, weil ein Erwerb, Verkauf oder Austausch der zugrundeliegenden Aktiva nicht erforderlich ist; diese dienen lediglich als rechnerische Bezugsgröße. Die damit verbundene **Transaktionskostensparnis** verleiht Finanzderivaten eine beträchtliche **Hebelwirkung** und ist mit ausschlaggebend für ihre starke Verbreitung.*

207

Hedging

- Hedge: Hecke; to hedge a bet: auf Nummer sicher gehen
- Reduktion eines Preisänderungsrisikos einer Kassaposition durch eine entsprechende Gegenposition am Terminmarkt mit möglichst hoher negativer Korrelation
- Traditionelles Hedging versus
 - Perfekter Hedge versus
 - Optimaler Hedge
 - Bestands-Hedge als Absicherung einer Kassaposition im Bestand
 - Antizipativer Hedge als Absicherung einer geplanten Kassaposition
 - Mikro-Hedge
 - Makro-Hedge

208

Spekulation und Trading

- Übernahme eines Preisänderungsrisikos in Erwartung von Änderungen der Marktpreise von Finanztiteln
- Unterschied zwischen Hedging und Spekulation
 - Initiator einer Hedge-Strategie hält aufgrund seiner sonstigen Geschäftstätigkeit bereits eine Risikoposition
 - Spekulanten halten ursprünglich keine Risikopositionen und engagieren sich direkt am Terminmarkt
- Ein wichtiges Charakteristikum der Spekulation liegt in der geplanten (kurzen) Dauer der gehaltenen Position (Day Trading, Scalping).

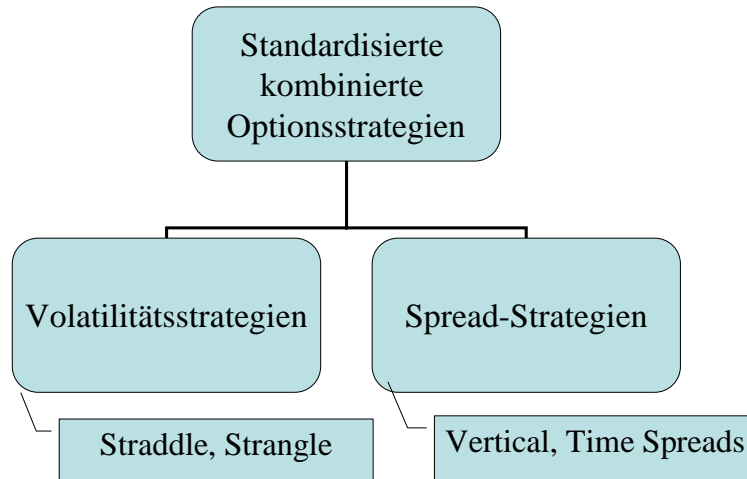
209

Arbitrage und Spreading

- Risikoloses, gewinnbringendes Ausnutzen räumlicher und zeitlicher Preisdifferenzen für gleiche Positionen durch simultane Kauf- und Verkaufstransaktionen
 - Räumliche Arbitrage durch Ausnutzen von Preisdifferenzen für Kontrakte an verschiedenen Börsenplätzen (Ausgleichs- oder Differenz-Arbitrage, Intramarket-Arbitrage, Intermarket-Arbitrage)
 - Zeitliche Arbitrage (Cash and Carry-Arbitrage)
 - Future- und Forward-Arbitrage
- Bei vollkommenem Kapitalmarkt, existieren keine Arbitrage-Möglichkeiten.
- Arbitrage trägt dazu bei, das Preisgleichgewicht zwischen Märkten, wie dem Termin- und Kassamarkt aufrechtzuerhalten.

210

Kombinierte Finanzderivate und synthetische Positionen



211

Standardisierte Optionsstrategien

- Long Straddle
 - Kaufe Call, Kaufe Put
- Short Straddle
 - Verkaufe Call, Verkaufe Put
- Long Strangle
 - Kaufe Put mit geringerem Basispreis, Kaufe Call mit höherem Basispreis
- Short Strangle
 - Verkaufe Put mit geringerem Basispreis, Verkaufe Call mit höherem Basispreis
- Vertical Spreads
 - Bull Put Vertical Spread
 - Kaufe Put mit geringerem Basispreis, Verkaufe Put mit höherem Basispreis
 - Bull Call Vertical Spread
 - Kaufe Call mit geringerem Basispreis, Verkaufe Call mit höherem Basispreis
 - Bear Put Vertical Spread
 - Kaufe Put mit höherem Basispreis, Verkaufe Put mit geringerem Basispreis
 - Bear Call Vertical Spread
 - Kaufe Call mit höherem Basispreis, Verkaufe Call mit geringerem Basispreis
- Time Spreads

212

Synthetische Nachbildung von ...	durch ...
Long Call	Long Put und Kauf des Basiswertes
Short Call	Short Put und Leerverkauf des Basiswertes
Long Put	Long Call und Leerverkauf des Basiswertes
Short Put	Short Call und Kauf des Basiswertes
Kauf des Basiswertes	Short Put und Long Call
Leerverkauf des Basiswertes	Long Put und Short Call

Bewertung unbedingter Termingeschäfte

- *Arbitrage-Ansatz: Kauf des Terminkontraktes versus Kauf des Basisobjekts und Lagerung*

Annahme: Vollkommener und vollständiger Kapitalmarkt

$$F_1 = S_0 + S_0 \cdot i + W_1 = S_0 + \text{CoC}_1 \text{ bzw. } F_T = S_0 + \text{CoC}_T$$

mit $t = 0$ Ausgangszeitpunkt, $t = T$ Liefertermin, $S = S_0$ Kassakurs zum Ausgangszeitpunkt, $S_T = \tilde{S}_T$ Kassakurs zum Liefertermin, $F_T = F_{0,T}$ Forward-Kurs zum Ausgangszeitpunkt mit Liefertermin T , CoC_T Cost of Carry für den Zeitraum von $t = 0$ bis $t = T$, $W_T = W_{0,T}$ Kosten der Lagerung während der Laufzeit des Termingeschäfts, i Kalkulationszinssatz für eine Periode der Länge 1, $r = 1+i$ Zinsfaktor

Strategie	Zahlungsstrom in $t = 0$	Zahlungstrom in $t = 1$
Kauf Basisobjekt und Zahlung Lagerkosten		
Rücklage für Lagerkosten		
Verkauf Forward		
Geldaufnahme		
Summe		

Tab.: Cost of Carry-Bewertung

Übungsaufgabe: Bewertung von Forwards

Der Kassakurs für Gold in $t = 0$ beträgt nach Annahme 360 US\$ pro Unze, der Terminkurs eines Forward-Geschäfts mit Fälligkeit in einem Jahr 400 US\$ pro Unze. Der Kalkulationszinssatz ist mit 9% p.a. gegeben. Die Lagerungskosten bestimmen sich zu 3,60 US\$ pro Unze im Jahr und sind am Ende der Laufzeit zu entrichten.

- a) Bestimmen Sie den Forward-Preis nach dem Cost of Carry-Ansatz.
- b) Zeigen Sie, wie ein Investor die identifizierte Überbewertung ausnutzen kann.

VERTEILUNGSFREIE ABSCHÄTZUNGEN VON OPTIONSWERTEN

Annahmen

- Vollkommener Kapitalmarkt
 - Keine Informations- und Transaktionskosten sowie Steuern
 - (Leer-) Käufe von Finanztiteln unbeschränkt möglich
 - Geldaufnahmen und -anlagen können zu einem gegebenen konstanten risikolosen Zinssatz getätigt werden.
- Vollständiger Kapitalmarkt: Positionen mit der gesuchten Zahlungscharakteristik am Markt vorhanden
- Kurse etwaiger Aktien fallen unmittelbar nach einer erfolgten Dividendenausschüttung um den jeweiligen Dividendenbetrag.

217

Notation

- $S = S_0$ Kurs des Basisobjekts in $t = 0$
- S_t Kurs des Basisobjekts im Zeitpunkt t
- $C = C_{0,T}$ Preis einer Kaufoption in $t = 0$ mit Fälligkeit in T
- $C_t = C_{t,T}$ Preis einer Kaufoption im Zeitpunkt t mit Fälligkeit in T
- C^E, C^A Preis einer europäischen bzw. amerikanischen Kaufoption
- $P = P_{0,T}$ Preis einer Verkaufsoption in $t = 0$ mit Fälligkeit in T
- $P_t = P_{t,T}$ Preis einer Verkaufsoption im Zeitpunkt t mit Fälligkeit in T
- P^E, P^A Preis einer europäischen bzw. amerikanischen Verkaufsoption
- K Basispreis der Option
- t_D Zeitpunkt einer Dividendenausschüttung
- D, \tilde{D} sichere bzw. unsichere Dividendenausschüttung pro Aktie
- D_{\min}, D_{\max} Abschätzung einer unsicheren Dividende nach unten bzw. oben
- D^{barw} Barwert der sicheren Dividendenausschüttungen
- $D_{\min}^{\text{barw}}, D_{\max}^{\text{barw}}$ Barwert der minimal bzw. maximal erwarteten Dividenden

218

Wertgrenzen

- Obere und untere Schranken für den Wert von Optionen
- Verteilungsfrei
- Ableitung aus Arbitrage-Tabelle („Beweis durch Widerspruch“)
- Arbitrage-Tabelle
 - Enthält in der Horizontalen Zahlungsströme von Positionen einer „geeigneten“ Portfolio-Strategie
 - Vertikal: Anfangszeitpunkt, Endzeitpunkt, evtl. auch Zwischenzeitpunkte
 - Selbstfinanzierende Strategie: Alle Positionen werden in $t = 0$ aufgebaut und zum Ende aufgelöst.

219

Untere Wertgrenze für Calls

$$C \geq S - K \cdot r^{-T}$$

Strategie	Zahlungsstrom	Zahlungsstrom in $t = T$	
	in $t = 0$	$S_T < K$	$S_T \geq K$
Kauf Call	$-C$		$S_T - K$
Verkauf Aktie	$+S$	$-S_T$	$-S_T$
Geldanlage	$-K \cdot r^{-T}$	$+K$	$+K$
Summe		> 0	$= 0$

220

Untere Wertgrenze für Calls

- Call-Prämie nie kleiner als Differenz aus Aktienkurs und diskontiertem Ausübungspreis

$$C \geq S - K \cdot r^{-T} > S - K = \text{Wert bei vorzeitiger Ausübung}$$

- Beweis „zunächst“ nur für europäische Kaufoptionen ohne Dividenden

$$C^E \geq S - K \cdot r^{-T}$$

- Aber: Beweis sofort übertragbar auf amerikanische Kaufoptionen, da bereits im speziellen Falle der Nichtausübung der Widerspruchsbeweis funktioniert und die Ausübung nicht „beweis-extern“ gesteuert wird

$$C^A \geq S - K \cdot r^{-T}$$

221

Untere Wertgrenze für Puts

$$P \geq K \cdot r^{-T} - S$$

Strategie	Zahlungsstrom in $t = 0$	Zahlungsstrom in $t = T$	
		$S_T < K$	$S_T \geq K$
Kauf Put	$-P$	$K - S_T$	
Kauf Aktie	$-S$	$+S_T$	$+S_T$
Geldaufnahme	$+K \cdot r^{-T}$	$-K$	$-K$
Summe		$= 0$	≥ 0

222

Vorzeitige Ausübung amerikanischer Calls

- Fall ohne Dividenden
 - Vorzeitige Ausübung ist nicht vorteilhaft
 - Es gilt $C^E = C^A$
- Fall mit Dividenden
 - Wenn der Barwert der während der Restlaufzeit einer amerikanischen Aktienkaufoption maximal erwarteten Dividendenausschüttungen zu jedem Zeitpunkt kleiner ist als der Zinsertrag, der sich aus der Anlage des Basispreises während dieses Zeitraums ergibt, dann wird die Kaufoption nicht vorzeitig ausgeübt.
 - Mögliche optimale Ausübungszeitpunkte nur unmittelbar vor einer Dividendenausschüttung

223

Vorzeitige Ausübung amerikanischer Calls

$$C_t^A \geq S_t - K \cdot r^{-(T-t)} > S_t - K \quad \text{für } 0 \leq t < T$$

$$\begin{aligned} C_t^A &= S_t - K \cdot r^{-(T-t)} + VWC_t \\ &= S_t - K + K - K \cdot r^{-(T-t)} + VWC_t \end{aligned}$$

$$\underbrace{C_t^A - (S_t - K)}_{\text{Verlust aufgrund vorzeitiger Ausübung}} = \underbrace{K - K \cdot r^{-(T-t)}}_{\text{Zeitwert für Anlage von K}} + \underbrace{VWC_t}_{\text{Versicherungswert der Option}}$$

224

Vorzeitige Ausübung amerikanischer Puts

- Fall ohne Dividenden
 - Wahrscheinlichkeit einer optimalen vorzeitigen Ausübung einer Verkaufsoption ist in jedem Zeitpunkt größer als null.
 - Es gilt $P^E \leq P^A$
- Fall mit Dividenden
 - Falls in jedem Zeitpunkt der Barwert der mindestens erwarteten Dividendenausschüttungen größer ist als der Zinsertrag durch die Anlage des Basispreises, dann wird eine amerikanische Aktienverkaufsoption nicht vorzeitig ausgeübt.
 - Setzt zwingend voraus, dass Fälligkeit mit einem Dividendentermin zusammenfällt

225

Vorzeitige Ausübung amerikanischer Puts

$$P_t^A \geq K \cdot r^{-(T-t)} - S_t \quad \text{für } 0 \leq t < T$$

$$\begin{aligned} P_t^A &= K \cdot r^{-(T-t)} - S_t + VWP_t \\ &= K - S_t + K \cdot r^{-(T-t)} - K + VWP_t \end{aligned}$$

$$\underbrace{P_t^A - (K - S_t)}_{\substack{\text{Verlust oder} \\ \text{Gewinn aufgrund} \\ \text{vorzeitiger} \\ \text{Ausübung}}} = \underbrace{K \cdot r^{-(T-t)} - K}_{\substack{\text{Zeitwert für} \\ \text{Anlage von K} \\ < 0}} + \underbrace{VWP_t}_{\substack{\text{Versicherungswert} \\ \text{der Option} \\ \geq 0}} \quad \text{für } 0 \leq t < T$$

226

Übungsaufgabe: Vorzeitige Ausübung

- a) Zeigen Sie für den Fall einer dividendenlosen Aktie, daß auf einem vollkommenen Kapitalmarkt der Wert eines Call nie kleiner als die Differenz zwischen dem Aktienwert und dem Barwert des Basiskurses sein kann.
- b) Zeigen Sie kurz mit Hilfe des Ergebnisses aus a), dass ein amerikanischer Call auf eine dividendenlose Aktie nicht vorteilhaft vorzeitig ausgeübt wird.
- c) Welche Aussage können Sie bzgl. der optimalen Ausübungszeitpunkte von amerikanischen Calls auf Aktien unter Berücksichtigung von anfallenden Dividendenausschüttungen treffen?

227

Put-Call-Parität

$$P^E = C^E - S + K \cdot r^{-T}$$

Strategie	Zahlungsstrom	Zahlungsstrom in $t = T$	
	in $t = 0$	$S_T < K$	$S_T \geq K$
Kauf Put	$- P^E$	$K - S_T$	
Verkauf Call	$+ C^E$		$- S_T + K$
Kauf Aktie	$- S$	$+ S_T$	$+ S_T$
Geldaufnahme	$+ K \cdot r^{-T}$	$- K$	$- K$
Summe		$= 0$	$= 0$

228

Put-Call-Paritäten (Quelle: Rudolph/Schäfer (2005), S. 225-230)

$$P^E = C^E - S + K \cdot r^{-T}$$

$$P^E = C^E - S + D \cdot r^{-t_D} + K \cdot r^{-T}$$

$$P^E = C^E - S + D^{\text{barw}} + K \cdot r^{-T}$$

$$C^E - S + D_{\min} \cdot r^{-t_D} + K \cdot r^{-T} \leq P^E \leq C^E - S + D_{\max} \cdot r^{-t_D} + K \cdot r^{-T}$$

$$C^E - S + D_{\min}^{\text{barw}} + K \cdot r^{-T} \leq P^E \leq C^E - S + D_{\max}^{\text{barw}} + K \cdot r^{-T}$$

$$C^A - S + K \cdot r^{-T} \leq P^A \leq C^A - S + K$$

$$C^A - S + K \cdot r^{-T} \leq P^A \leq C^A - S + D \cdot r^{-t_D} + K$$

$$C^A - S + K \cdot r^{-T} \leq P^A \leq C^A - S + D_{\max} \cdot r^{-t_D} + K$$

$$C^A - S + K \cdot r^{-T} \leq P^A \leq C^A - S + D_{\max}^{\text{barw}} + K$$

229

Übungsaufgabe: Put-Call-Parität

Quelle: Rudolph/Schäfer (2005), S. 257.

Eine europäische Kaufoption auf eine Aktie notiert zu 5,75 € bei einem Basispreis von 90 €. Die Option hat eine Restlaufzeit von einem Jahr. Der Kalkulationszinssatz ist 10% p.a. Der heutige Aktienkurs beträgt 87,50 €.

- Bestimmen Sie den Wert einer Verkaufsoption gleichen Typs über die Put-Call-Parität.
- Bestimmen Sie den Wert einer Verkaufsoption gleichen Typs, wenn genau nach der Hälfte der Restlaufzeit eine Dividende in Höhe von 4,50 € ausgeschüttet wird.

230

Übungsaufgabe: Put-Call-Paritäten

- a) Zeigen Sie, dass für amerikanische Aktienoptionen die Beziehung

$$C - S + Kr^{-T} \leq P$$

bei Vernachlässigung von Dividenden gilt. Bilden Sie im Rahmen des Beweises eine Strategie bestehend aus dem Kauf eines Put, dem Verkauf eines Call, dem Kauf einer Aktie und einer Geldaufnahme in einem Arbitrageableau ab. Begründen Sie, ob und inwieweit die vorzeitigen Ausübungsmöglichkeiten der Optionen im Beweis eingehen.

- b) Zeigen Sie - ebenfalls in einer vollständigen Argumentation - für amerikanische Aktienoptionen ohne Dividenden die Ungleichung:

$$P \leq C - S + K$$

231

Übungsaufgabe: Beispiel zur Put-Call-Parität

Der DAX-Call mit Basispreis 2.200 und Fälligkeit in drei Monaten notiert am 28.07.95 zu 87,0. Berechnen Sie den Preis einer Verkaufsoption des gleichen Typs bei einem Jahreszinssatz von 4,75% und einem aktuellen DAX-Stand bei 2.229,99 Punkten. Begründen Sie die von Ihnen ausgewählte Form der Put-Call-Parität.

232

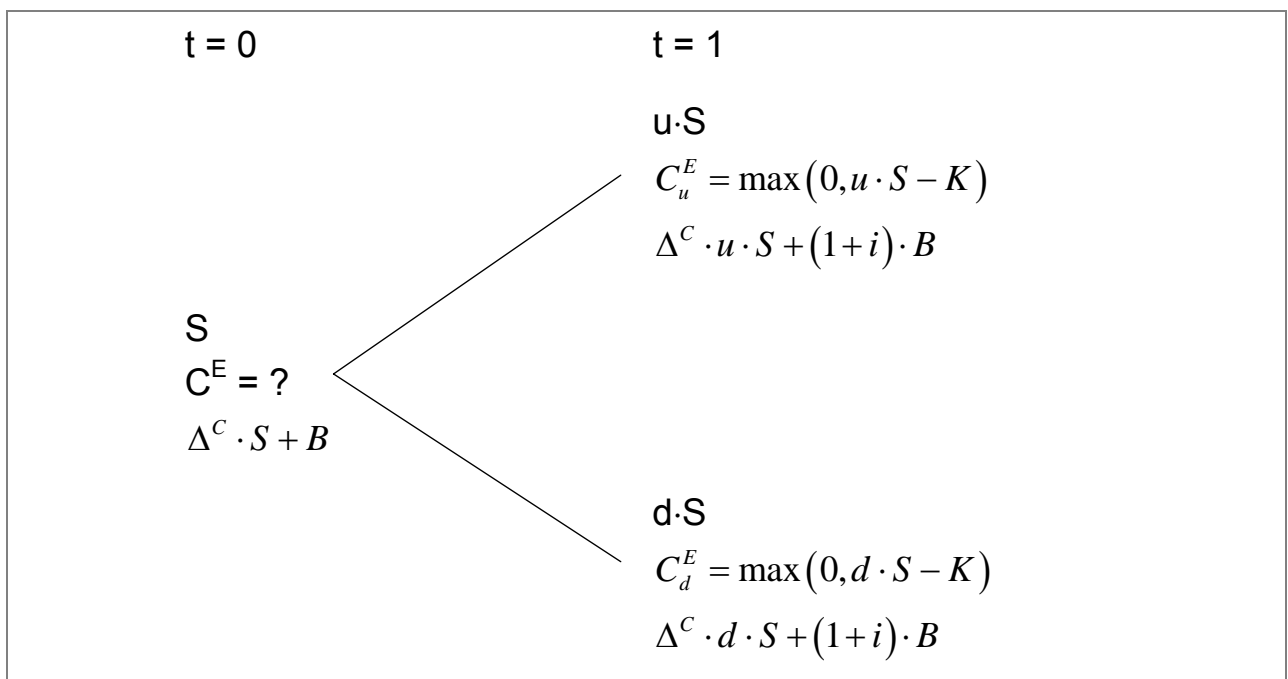
BINOMIALMODELL ZUR BEWERTUNG VON OPTIONEN

Einperiodenfall

Annahmen zur Bewertung einer Aktienoption im Binomialmodell

- Handel zu diskreten Zeitpunkten mit konstanter Periodenlänge
- Binomialer Kursprozess mit konstanten Änderungsraten u, d
- Vollkommener und vollständiger Kapitalmarkt
- Europäische Option
- Keine Dividendenzahlungen

233



Quelle: In Anlehnung an Rudolph/Schäfer (2005), S. 231-232.

Abbildung: Einperiodige Kursbewegungen im Binomialmodell

234

Duplikations-Portfolio

$$\Delta^C \cdot u \cdot S + r \cdot B = C_u^E$$

$$\Delta^C \cdot d \cdot S + r \cdot B = C_d^E$$

Bedingung

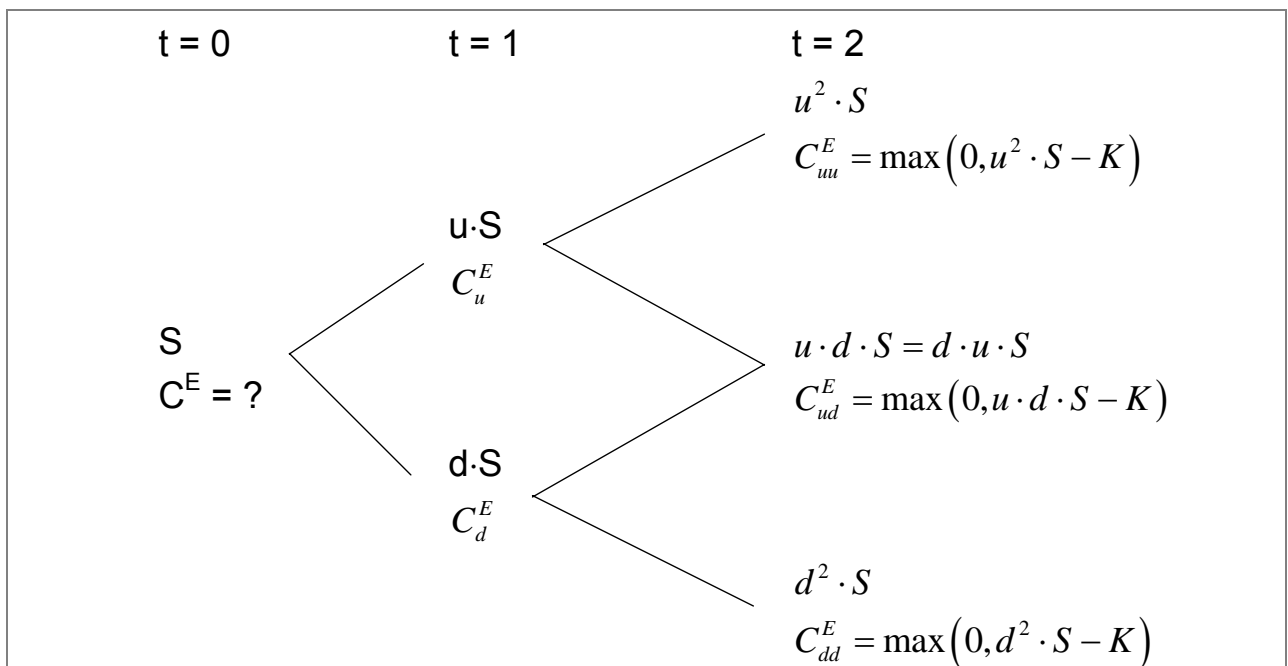
$$\Delta^C = \frac{C_u^E - C_d^E}{(u-d) \cdot S} \quad \text{und} \quad B = \frac{u \cdot C_d^E - d \cdot C_u^E}{(u-d) \cdot r}$$

Optionswert

$$C^E = \Delta^C \cdot S + B = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{r-d}{u-d} \cdot C_u^E + \frac{u-r}{u-d} \cdot C_d^E \right) = \frac{p \cdot C_u^E + (1-p) \cdot C_d^E}{r}$$

235

Binomialmodell im Zweiperiodenfall



Quelle: In Anlehnung an Rudolph/Schäfer (2005), S. 237-238.

236

Werte der Option in $t = 1$

$$C_u^E = \frac{p \cdot C_{uu}^E + (1-p) \cdot C_{ud}^E}{r}$$

$$C_d^E = \frac{p \cdot C_{ud}^E + (1-p) \cdot C_{dd}^E}{r}$$

Wert der Option in $t = 0$

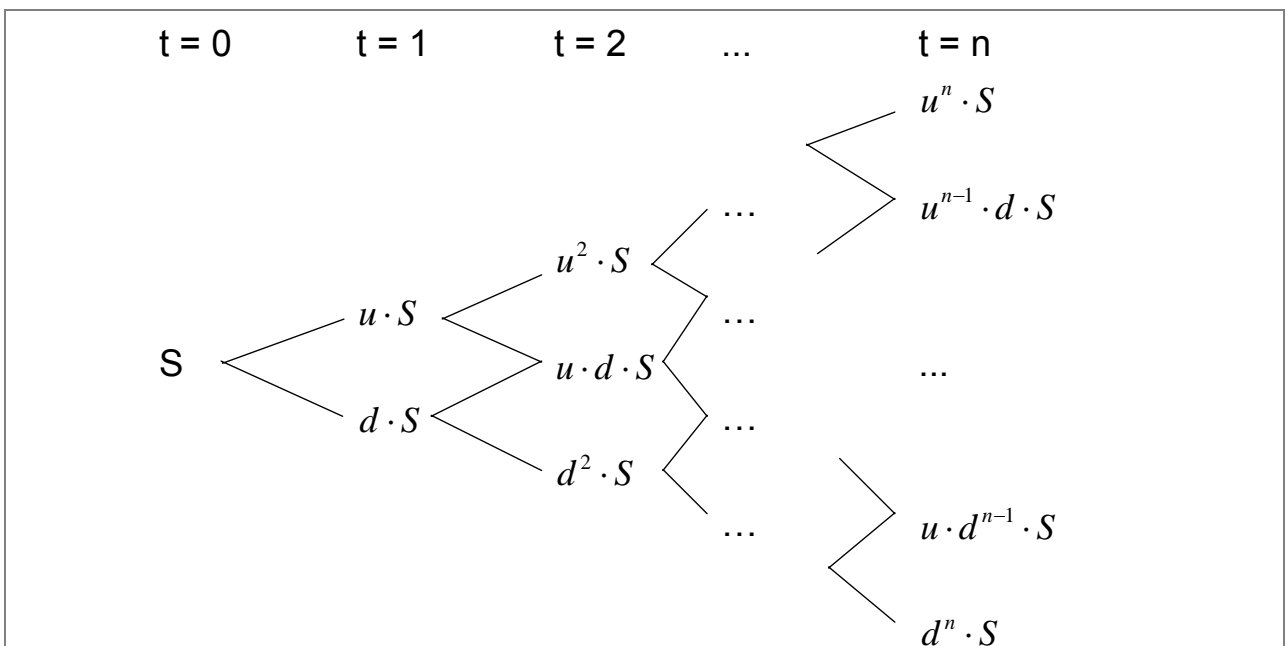
$$C^E = \frac{p \cdot C_u^E + (1-p) \cdot C_d^E}{r}$$

bzw.

$$C^E = \frac{p^2 \cdot C_{uu}^E + 2 \cdot p \cdot (1-p) \cdot C_{ud}^E + (1-p)^2 \cdot C_{udd}^E}{r^2}$$

237

Binomialmodell im N -Periodenfall



Quelle: In Anlehnung an Rudolph/Schäfer (2005), S. 241.

Abbildung: Aktienkursbewegung über n Perioden im Binomialmodell

238

Werte der Option in $t = n$

$$C_{u^j d^{n-j}}^E = \max(0, u^j \cdot d^{n-j} \cdot S - K) \quad \text{für } j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Werte der Option in $t = n - 1$

$$C_{u^{j-1} d^{n-j}}^E = \frac{p \cdot C_{u^j d^{n-j}}^E + (1-p) \cdot C_{u^{j-1} d^{n-j+1}}^E}{r} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n$$

Wert der Option in $t = 0$

$$\begin{aligned} C^E &= \frac{1}{r^n} \cdot \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j} \cdot C_{u^j d^{n-j}}^E \\ &= \frac{1}{r^n} \cdot \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j} \cdot \max(0, u^j \cdot d^{n-j} \cdot S - K) \end{aligned}$$

239

Mit „genügend großem a “ folgt

$$C^E = S \cdot \underbrace{\sum_{j=a}^n \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j} \cdot \frac{u^j \cdot d^{n-j}}{r^n}}_{1. \text{ Summand}} - K \cdot r^{-n} \cdot \underbrace{\sum_{j=a}^n \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j}}_{2. \text{ Summand}}$$

Binomiale Optionsbewertungsformel

$$C^E = S \cdot B(a|n, p^*) - K \cdot r^{-n} \cdot B(a|n, p)$$

$$P^E = -S \cdot [1 - B(a|n, p^*)] + K \cdot r^{-n} \cdot [1 - B(a|n, p)]$$

mit der Verteilungsfunktion einer binomialverteilten Zufallsvariablen

$$B(a|n, p) = \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j}$$

und der Setzung $p^* = p \cdot \frac{u}{r}$ und damit $1 - p^* = (1-p) \cdot \frac{d}{r}$

240

Übungsaufgabe: Binomialmodell im Ein-Perioden-Fall

Quelle: Rudolph/Schäfer (2005), S. 259.

Eine Aktie steht heute bei 200 €. In einer Periode notiert die Aktie nach Annahme entweder zu 220 € oder zu 180 €. Der Marktzins für sichere Anlagen beträgt 5% pro Periode. Bestimmen Sie den Wert einer europäischen Kaufoption und einer europäischen Verkaufsoption jeweils mit Basispreis 200 € und Restlaufzeit von einer Periode!

241

Übungsaufgabe: Binomialmodell im Drei-Perioden-Fall

Quelle: Rudolph/Schäfer (2005), S. 258.

Der Deutsche Aktienindex DAX steht bei 4.000 Punkten. Es wird angenommen, dass der DAX über die nächsten drei Perioden eine binomiale Veränderung um die Faktoren $u = 1,1$ oder $d = 0,9$ erfährt. Der Kalkulationszinssatz beträgt 2% pro Periode.

- a) Berechnen Sie den aktuellen Wert einer DAX-Kaufoption mit $K = 4.400$ und einer Restlaufzeit von drei Perioden!
- b) Wie viele Kursaufwärtsbewegungen sind nötig, damit die Kaufoption zur Fälligkeit im Geld ist?

242

Übungsaufgabe: Binomialmodell im Drei-Perioden-Fall

Quelle: Rudolph/Schäfer (2005), S. 258.

Gegeben ist eine Aktie mit aktuellem Kurs 300 €. Für die kommenden drei Perioden mit den Zeitpunkten $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ und $t = 3$ wird mit einer binomialen Kursveränderung um die Faktoren $u = 1,05$ beziehungsweise $d = 1,01$ gerechnet.

Berechnen Sie den Wert einer europäischen Verkaufsoption mit Fälligkeit in $t = 3$ und Basispreis 320 €, wenn der risikolose Zinssatz pro Periode 2% beträgt!

243

OPTIONSBEWERTUNG MIT DER BLACK/SCHOLES-FORMEL

Annahmen des Modells von Black, Scholes und Merton

- Normalverteilte Aktienrenditen bei konstanter Momentanvarianz p.a.
- Kontinuierlicher Handel
- Vollkommener und vollständiger Kapitalmarkt
- Europäische Option; keine Dividendenzahlungen

Herleitung

- Bspw. Black/Scholes-Differentialgleichung
- Risikoadjustierte Diskontierung des Erwartungswertes der Optionspreise
- Grenzübergang aus dem Binomialmodell

244

Black/Scholes-Formel

$$C^E = S \cdot N(d_1) - K \cdot r^{-T} \cdot N(d_2)$$

$$P^E = -S \cdot [1 - N(d_1)] + K \cdot r^{-T} \cdot [1 - N(d_2)] = -S \cdot N(-d_1) + K \cdot r^{-T} \cdot N(-d_2)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(\ln r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

σ Standardabweichung der Aktienrendite pro Periode (Volatilität)

$N(\cdot)$ Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable

245

Übungsaufgabe: Black/Scholes

- Auf welchen Annahmen basiert das Black/Scholes-Modell?
- Nennen Sie die fünf wichtigsten Einflussfaktoren auf den Wert einer Option (nach dem Black/Scholes-Modell). Wie reagiert jeweils der Wert einer Kauf- bzw. einer Verkaufsoption (steigend, fallend) auf Veränderungen der Einflussvariablen. Begründen Sie kurz (in Stichpunkten) Ihre Antworten.
- Wann kann man das Black/Scholes-Modell ohne Einschränkungen auch zur Bewertung Amerikanischer Optionen anwenden? Begründen Sie Ihre Antwort.

246

Einflussparameter der Optionsbewertung

Einfluss einer Zunahme des Faktors auf den Optionswert	Preis eines Put	Preis eines Call
S = heutiger Kurs des Basistitels (bei Aktioptionen = heutiger Aktienkurs)	↓	↑
K = im Optionskontrakt festgelegter Ausübungspreis	↑	↓
T = Laufzeit der Option in Jahren	↑	↑
σ = Standardabweichung der Rendite des Basistitels p.a. (= Volatilität der Basisaktie)	↑	↑
r = kurzfristiger risikoloser Zins p.a.	↓	↑

247

Übungsaufgabe: Sensitivitäten

Quelle: Rudolph/Schäfer (2005), S. 261-262.

Geben Sie das asymptotische Verhalten des Wertes einer europäischen Kaufoption nach der Black/Scholes-Formel bei der jeweils angegebenen grenzwertigen Veränderung einer der Einflussgrößen und gleichzeitiger Konstanz der restlichen Einflussvariablen an:

Für $S < K$ gilt $T \rightarrow 0 \Rightarrow C^E \rightarrow ?$

Für $S > K$ gilt $T \rightarrow 0 \Rightarrow C^E \rightarrow ?$

Für $S < Kr^{-T}$ gilt $\sigma \rightarrow 0 \Rightarrow C^E \rightarrow ?$

Für $S > Kr^{-T}$ gilt $\sigma \rightarrow 0 \Rightarrow C^E \rightarrow ?$

248

$$S \rightarrow 0 \Rightarrow C^E \rightarrow ?$$

$$S \rightarrow \infty \Rightarrow C^E \rightarrow ?$$

$$K \rightarrow 0 \Rightarrow C^E \rightarrow ?$$

$$K \rightarrow \infty \Rightarrow C^E \rightarrow ?$$

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow C^E \rightarrow ?$$

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow C^E \rightarrow ?$$

$$\sigma \rightarrow \infty \Rightarrow C^E \rightarrow ?$$

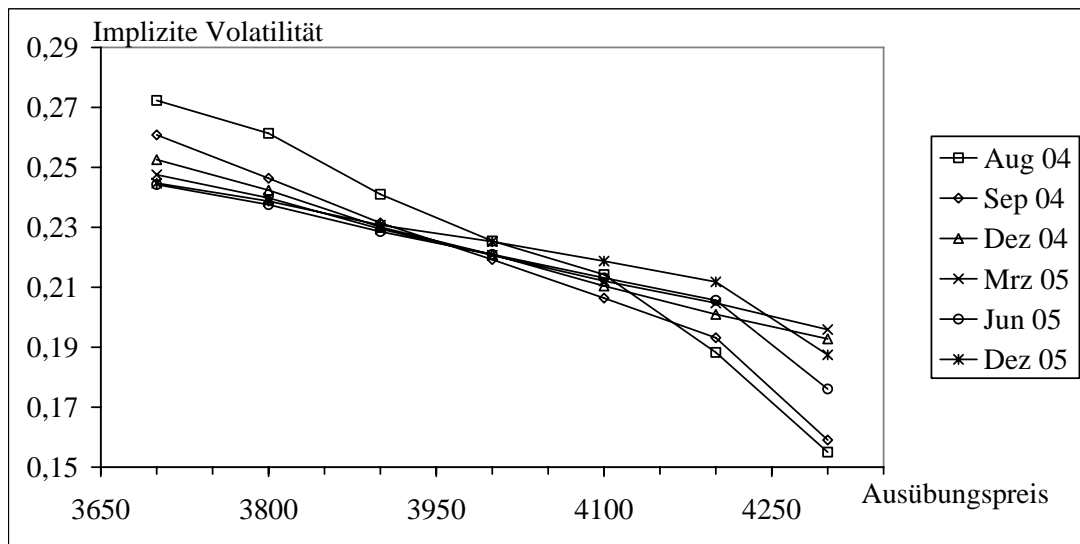
Volatilität – Beispiel

- Volatilität als Maß für die „Neigung eines Werts, im Preis zu schwanken“
- Historische versus implizite Volatilität
 - 14. Juli 2000: DAX 7.318,38 Punkte
 - DAX-Call mit Fälligkeit August 2000 und Basiskurs 7.500 Punkte
 - 3-Monats-EURIBOR 4,55%
 - Call notiert am Markt bei 95 Punkten
 - Black/Scholes-Werte bei
 - Historische Volatilität des DAX 17,93% (30 Tage)
 - Historische Volatilität des DAX 23,26% (250 Tage)
 - Implizite Volatilität des VDAX 19,32%

$$C(\sigma = 0,1793) = 87,93 \quad C(\sigma = 0,1932) = 98,91 \quad C(\sigma = 0,2326) = 130,56$$

Implizite Volatilität – Volatility Smile bei DAX-Calls

Quelle: Rudolph/Schäfer (2005), S. 270.



251

Optionskennzahlen – Delta

- Optionskennzahlen: Sensitivitäten des Optionswerts
- Delta Δ
 - Sensitivität des Optionspreises gegenüber dem Basisobjektkurs
 - Delta eines Call liegt zwischen 0 und 1
 - Put-Delta liegt zwischen -1 und 0
 - Black/Scholes-Deltas

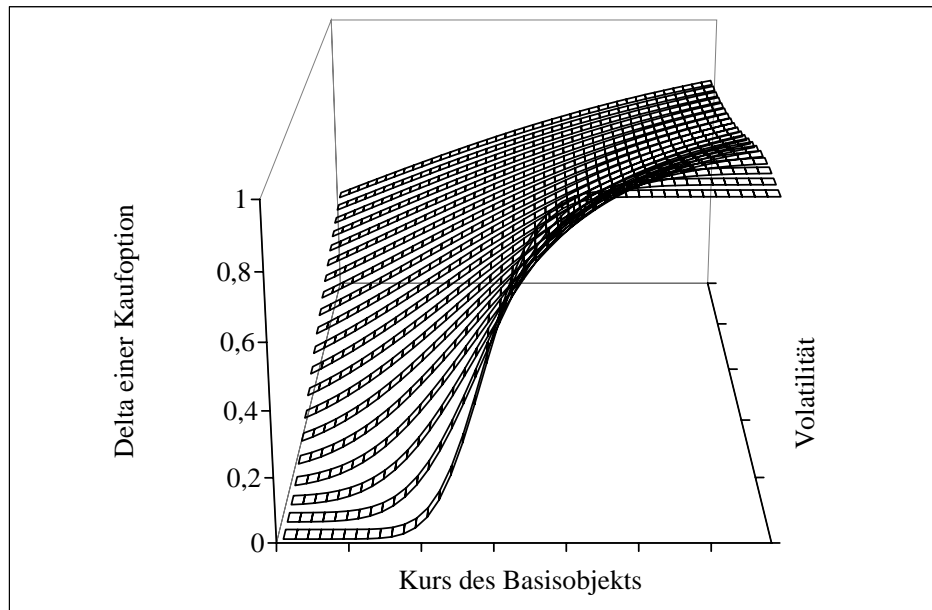
$$\Delta^C = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$

$$\Delta^P = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1 = -N(-d_1)$$

- Binomial-Deltas

252

Optionskennzahlen – Delta



253

Optionskennzahlen – Delta im Binomialmodell

- Kursbewegung in der Basisaktie
 - Zeitdiskret
 - Binomial
 - Kursveränderungen um Faktoren u und d
 - Beispiel: Zwei Perioden, Call
 - Delta-Werte:

$$\Delta^C = \frac{C_u - C_d}{(u - d) \cdot S}$$

$$\Delta_u^C = \frac{C_{uu} - C_{ud}}{(u - d) \cdot u \cdot S} \quad \Delta_d^C = \frac{C_{ud} - C_{dd}}{(u - d) \cdot d \cdot S}$$

254

Optionskennzahlen – Delta

- Beispiel
- Aktienkursbewegung $S = 250$ mit $u = 1,6$ und $d = 0,80$
- Optionswerte zur Fälligkeit
 - $C_{uu} = 390$; $C_{ud} = 70$; $C_{dd} = 0$
- Optionswerte in $t = 1$
 - $C_u = 176,79$; $C_d = 25$
- Optionswert in $t = 0$
 - $C = 76,53$
- Delta-Wert für erste Periode: 0,7589
- Delta-Werte für zweite Periode: 1 bzw. 0,4375

255

Beispiel zum Delta-Hedging im Binomialmodell in $t = 0$

Strategie	Zahlungsstrom		Zahlungsstrom in $t = 1$	
	in $t = 0$	$d \cdot S = 200$	$u \cdot S = 400$	
Kauf Call	- 76,53	+ 25,00	+ 176,79	
Verkauf Δ^C Aktien	+ 0,7589 · 250 = + 189,73	- 0,7589 · 200 = - 151,78	- 0,7589 · 400 = - 303,56	
Geldanlage	- 113,20	+ 126,78	+ 126,78	
Summe	= 0	= 0	= 0	

256

Beispiel zum Delta-Hedging im Binomialmodell für u·S in t = 1

Strategie	Zahlungsstrom	Zahlungsstrom in t = 2	
	in t = 1	d·u·S = 320	u·u·S = 640
Kauf Call	– 176,79	+ 70	+ 390
Verkauf eine Aktie	+ 400,00	– 320	– 640
Geldanlage	– 223,21	+ 250	+ 250
Summe	= 0	= 0	= 0

257

Beispiel zum Delta-Hedging im Binomialmodell für d·S in t = 1

Strategie	Zahlungsstrom	Zahlungsstrom in t = 2	
	in t = 1	d·d·S = 160	d·u·S = 320
Kauf Call	– 25,00	+ 0	+ 70
Verkauf 0,4375 Aktien	+ 0,4375·200 = + 87,508	– 0,4375·160 = – 70	– 0,4375·320 = – 140
Geldanlage	– 62,50	+ 70	+ 70
Summe	= 0	= 0	= 0

258

Übungsaufgabe: Delta im Binomialmodell

Quelle: Rudolph/Schäfer (2005), S. 297.

Gegeben ist eine dividendenlose Aktie mit dem Kurs 300. Es wird angenommen, dass der Kurs der Aktie pro Periode entweder mit dem Faktor 1,3 steigt oder mit dem Faktor 0,8 fällt. Unterstellt wird ein Kursprozess gemäß eines zweiperiodigen Binomialmodells.

- a) Wie hoch ist der theoretische Wert einer europäischen Kaufoption mit dem Basispreis 310, wenn der Marktzins pro Periode 10% beträgt?
- b) Wie groß ist das Options-Delta in $t = 0$? Zeigen Sie, dass das Hedge-Portfolio bei dem von Ihnen berechneten Delta risikofrei ist.
- c) Geben Sie die beiden Delta-Werte für die zweite Periode an. Konstruieren Sie entsprechende Arbitrage-Strategien.

259

Optionskennzahlen – Gamma

- Beschreibt die Sensitivität des Delta bzgl. Veränderungen des Underlying-Wertes
 - Berechnet sich als zweite Ableitung einer Optionsbewertungsformel
 - Notation: Γ
 - Ist für Calls und Puts gleich groß
 - Immer positiv
 - Ist für stark out und in the money-liegende Optionen nahezu gleich Null
 - Ist maximal für at the money-liegende Optionen
- *Einsatz: Steuerung des Delta*

260

Optionskennzahlen von Portfolios

- Gewichtete Summe der einzelnen Optionskennzahlen

$$\Delta = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \Delta_j$$

- Delta-Neutralität = Delta eines Portfolio gleich Null
- Analog: Neutralität bezüglich weiterer Kennzahlen

Übungsaufgabe: Delta-neutral

Quelle: Rudolph/Schäfer (2005), S. 298.

Sie kaufen 100 Puts mit einem Delta von jeweils $-0,3$. Wie viele Puts mit einem Delta von $-0,85$ sollten Sie zur Konstruktion einer Delta-neutralen Position verkaufen?

Übungsaufgabe: Delta und Gamma

Quelle: Rudolph/Schäfer (2005), S. 298.

Ein Investor-Portfolio umfasst die in der Tabelle abgetragene Position in DAX-Optionen. Berechnen Sie Delta und Gamma des Portfolio.

Option	Long / Short	Anzahl	Delta	Gamma
Call A	Long	2.000	0,7	0,5
Call B	Short	500	0,5	0,6
Put A	Long	1.000	-0,6	0,4
Put B	Short	1.500	-0,4	0,8

263

Übungsaufgabe: Delta und Gamma

Quelle: Rudolph/Schäfer (2005), S. 298.

- Ermitteln Sie mit Hilfe einfachster Ableitungsregeln aus dem Delta einer europäischen Kaufoption das Delta einer europäischen Verkaufsoption mit Hilfe der Put-Call-Parität.
- Zeigen Sie mit Hilfe einfachster Ableitungsregeln und der Put-Call-Parität, dass das Gamma europäischer Calls und Puts identisch ist.

264

Übungsaufgabe: Neutrale Strategien

Eine Bank ist allgemein sehr erfolgreich beim Verkauf von Wechselkursabsicherungen an ihre Kunden. Sie verfügt deshalb über ein großes USD/EUR-Optionsportefeuille, dessen Risiken sie allerdings nicht gerne tragen möchte. Die Bank hat keine Möglichkeit die Positionen des Optionsportefeuilles durch den Aufbau exakt gegenläufiger Optionspositionen glattzustellen, sie kennt aber die folgenden Optionskennzahlen des Portefeuilles:

Delta: $\Delta_{PF} = -900.000$

Gamma: $\Gamma_{PF} = -50.000$

Lambda: $\Lambda_{PF} = -20.000$

Am Markt wird eine USD/EUR-Option mit einem Delta von 0,35 einem Gamma von 0,8 und einem Lambda von 0,4 gehandelt.

265

- a) Was versteht man hier unter dem Delta-, Gamma- und Lambda-Wert des Portefeuilles?
- b) Mit welchen Positionen in der Option und in Euro kann die Bank ein Delta-Gamma-neutrales Portefeuille realisieren?
- c) Am Markt existiert eine zweite USD/EUR-Option mit einem Delta von -0,6 einem Gamma von 0,75 und einem Lambda von 0,25. Mit welchen Positionen in den Optionen sowie und in Euro kann die Bank ein Delta-Gamma-Lambda-neutrales Portefeuille realisieren?

266

Optionskennzahlen – Greeks

Wertbestimmende Größe	Greek	Kaufoption	Verkaufsoption
Kurs des Basisobjekts	Delta	Δ^C ist positiv: $\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$	Δ^P ist negativ: $\frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1$
Delta-Faktor	Gamma	Γ ist positiv: $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{1}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} \cdot N'(d_1)$	Γ ist positiv: $\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{1}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} \cdot N'(d_1)$
Optionslaufzeit	Theta	Θ^C ist negativ $-\frac{\partial C}{\partial T} = -\frac{S \cdot \sigma}{2 \cdot \sqrt{T}} \cdot N'(d_1) - K \cdot r^{-T} \cdot (\ln r) \cdot N(d_2)$	Θ^P wechselnd $-\frac{\partial P}{\partial T} = -\frac{\partial C}{\partial T} + (\ln r) \cdot K \cdot r^{-T}$
Volatilität der Kursrendite	Lambda (Vega)	Λ ist positiv: $\frac{\partial C}{\partial \sigma} = S \cdot \sqrt{T} \cdot N'(d_1)$	Λ ist positiv: $\frac{\partial P}{\partial \sigma} = S \cdot \sqrt{T} \cdot N'(d_1)$
Kalkulationszinssatz	Rho	P^C ist positiv $\frac{\partial C}{\partial r} = T \cdot K \cdot r^{-(T+1)} \cdot N(d_2)$	P^P ist negativ $\frac{\partial P}{\partial r} = -T \cdot K \cdot r^{-(T+1)} \cdot N(-d_2)$
Basispreis	Alpha	A^C ist negativ: $\frac{\partial C}{\partial K} = -r^{-T} \cdot N(d_2)$	A^P ist positiv: $\frac{\partial P}{\partial K} = r^{-T} \cdot [1 - N(d_2)]$

267

Übungsaufgabe: Greeks bei Puts

Der faire Wert eines Put lässt sich als Funktion seiner Determinanten darstellen: $P=P(S, K, \sigma, r, T)$.

- Benennen Sie die in der Formel angegebenen Determinanten des Putpreises.
- Benennen Sie die Optionskennzahlen eines Put anhand der jeweiligen Ableitungen der Funktion P, geben Sie Hypothesen für das Vorzeichen der Ableitungen und skizzieren Sie für die Ableitung nach S den Wert der Kennzahl in Abhängigkeit von S.
- Was versteht man unter dem Gamma-Wert einer Verkaufsoption?
- Was ist eine Delta-Gamma-neutrale Strategie?
- Was versteht man unter dem Options-Omega eines Put? (1P)

268

ERGÄNZENDE LITERATURHINWEISE ZU KAPITEL 6

Rudolph, Bernd / Schäfer, Klaus (2005) Derivative Finanzmarktinstrumente. Eine anwendungsbezogene Einführung in Märkte, Strategien und Bewertung. Berlin et al., S. 181-187, 231-263

sowie

Hull J C (2003) Options, Futures & Other Derivatives. Upper Saddle River, New Jersey

Steiner P, Uhlir H (2000) Wertpapieranalyse. Heidelberg

Stoll H R, Whaley R E (1993) Futures and Options. Cincinnati, Ohio

Zum Binomialmodell

Cox J C, Ross S A, Rubinstein M (1979) Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics 7, S. 229-263

Rendleman R J, Bartter B J (1979) Two-State Option Pricing. Journal of Finance 34, S. 1093-1110

269

Zur Black/Scholes-Formel

Black F, Scholes M (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy 81, S. 637-654

Merton R C (1973) Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science 4, S. 141-183

Merton R C (1998) Applications of Option-Pricing Theory: Twenty-Five Years Later. American Economic Review 88, S. 323-349

Scholes M (1998) Derivatives in a Dynamic Environment. American Economic Review 88, S. 350-370

270

WERTPAPIERANALYSE UND KAPITALMARKTTHEORIE

Bond
Portfolio
Management

271

Investitionsplanung bei nicht flacher Zinskurve

- normale Zinskurve: längerfristige Anlagen mit höheren Zinssatz
- inverse Zinskurve: kürzerfristige Anlagen mit höherem Zinssatz
- flache Zinskurve: Anlagen aller Laufzeiten mit gleichem Zinssatz

Analytische Beschreibung der Zinsstruktur über das Spektrum der Laufzeitzinssätze (= Spot Rates) bzw. der Terminzinssätze (= Forward Rates)

Fristigkeitsstruktur der Zinssätze (Terminstruktur der Zinssätze; term structure of interest rates): Menge aller in einem bestimmten Zeitpunkt geltenden effektiven Zinssätze festverzinslicher Wertpapiere, die sich in den Restlaufzeiten unterscheiden

272

Zusammenhang zwischen Spot Rates und Forward Rates – Beispiel

Laufzeitzinssätze

- Rendite einer einjährigen Nullkupon-Anleihe (Zero Bond): $i_{0,1} = 6\%$
- Rendite einer zweijährigen Nullkupon-Anleihe: $i_{0,2} = 7\%$
- Terminzinssatz für die zweite Periode: $i_{1,2} = ?$
- Die Investition in die einjährige Nullkupon-Anleihe mit anschließender Anlage zum Terminzinssatz muss auf einem vollkommenen Kapitalmarkt das gleiche Endvermögen ergeben wie die Investition in die zweijährige Nullkupon-Anleihe

$$i_{1,2} = \frac{(1 + i_{0,2})^2}{(1 + i_{0,1})} - 1 = \frac{1,07^2}{1,06} - 1 = 8,0094\%$$

273

Zinsstruktur und Kuponanleihen – Beispiel

Bei den unterstellten Terminzinssätzen dürfte bspw. eine zweijährige Kuponanleihe mit einem Kupon von 7% keinen Effektivzinssatz von 7% aufweisen, weil der in $t = 1$ fällige Kupon zu einem Zinssatz von 8,0094% reinvestiert werden könnte.

$$\frac{0,07}{(1 + i_{eff,0,2})} + \frac{1,07}{(1 + i_{eff,0,2})^2} = \frac{0,07}{1,06} + \frac{1,07}{1,06 \cdot 1,08009} = 1,000621$$

- Es berechnet sich ein Effektivzinssatz von $i_{eff,2} = 6,966\%$.
- Kupon-Effekt: Effektivzins der Kupon-Anleihe bei steigender Zinskurve bei gleichen Nominalzinssätzen kleiner als Effektivzins einer Nullkupon-Anleihe
- Als Spot Rates (Laufzeitzinssätze) verwendet man daher, wenn am Markt bekannt, die Zinssätze für Zero Bonds.

274

Arbitrage-Analyse – Beispiel

- Zahlungsstrombezogene Darstellung eines festverzinslichen Wertpapiers bzw. eines Kredits und Reproduktion des Zahlungsstroms durch andere am Markt verfügbare Finanztitel
- Am Markt sind zwei Anleihen mit folgender Zahlungscharakteristik und folgenden Renditen verfügbar.
- Zinssatz für erstes Jahr: 5%

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	Rendite?
WP1	- 90		101,124	6%
WP2	- 100	6	106	6%

275

Welches der beiden Wertpapiere ist vorzuziehen?

Der zu beurteilende Zahlungsstrom WP1 ist mit Hilfe anderer Titel (hier WP2 und der einjährigen Anlage) zu **duplizieren**. Wenn der ursprüngliche und der duplizierte Zahlungsstrom nicht den gleichen Kurswert aufweisen, bestehen Arbitrage-Möglichkeiten.

	p_0	Z_1	Z_2
WP2	- 100	+ 6	+ 106
/106	- 100/106	+ 6/106	+ 1
* 101,124	- 95,4	+ 5,724	+ 101,124

276

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
WP1	- 90		+ 101,124
WP2	- 95,4	+ 5,724	+ 101,124
WP1 – WP2	+ 5,4	- 5,724	

	ρ_0	z_1
Einj. 5%	+ 100	- 105
/105	+ 100/105	- 1
* 5,724	+ 5,4514	- 5,724

277

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
WP1	- 90		+ 101,124
WP2	- 95,4	+ 5,724	+ 101,124
5%	+ 5,4514	- 5,724	
WP2 + 5%	- 89,9486		+ 101.124

278

Übungsaufgabe

Am Rentenmarkt sind drei Anleihen mit folgenden Zahlungsreihen verfügbar. Berechnen Sie aus den Titeln A, B und C die Terminzinssätze (Forward Rates) und die Laufzeitzinssätze (Spot Rates) aus Sicht eines Investors, dem alle genannten Titel als Vermögensanlage offenstehen.

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
A	-100	6	6	102,714
B	-101	5	105,042	
C	-98	101,920		

279

Spot Rates: Zinssätze von $t = 0$ bis 1, von $t = 0$ bis 2, von $t = 0$ bis 3

Terminzinssätze: Zinssätze von $t = 0$ bis 1, von $t = 1$ bis 2, von $t = 2$ bis 3

Kapitalwertformel auf Basis von Terminzinssätzen:

$$K_0 = z_0 + \frac{z_1}{1+i_{0,1}} + \frac{z_2}{(1+i_{0,1}) \cdot (1+i_{1,2})} + \dots + \frac{z_T}{(1+i_{0,1}) \cdot \dots \cdot (1+i_{T-1,T})}$$

Für Wertpapier C folgt (Warum?):

$$0 = -98 + \frac{101,920}{1+i_{0,1}}$$

Für Wertpapier B folgt:

$$0 = -101 + \frac{5}{1+i_{0,1}} + \frac{105,042}{(1+i_{0,1}) \cdot (1+i_{1,2})}$$

280

Übungsaufgabe

Einem Investor stehen neben den obigen Anleihen A, B und C noch die Möglichkeit der Anlage in ein Wertpapier D offen, das folgende Zahlungsreihe besitzt. In welchen Titel sollte ein Investor auf keinen Fall investieren?

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
D	-102	8	8	100

281

DURATION

Sensitivitätsanalyse am Beispiel der Duration

- Berechnung der Kursänderung eines festverzinslichen Wertpapiers bei einer einmaligen Zinsänderung
- Duration als gewichteter Mittelwert aus den Zahlungszeitpunkten der Einzahlungen
- Gewichtungsfaktor = diskontierte Einzahlung
- Duration als barwertgewichtete durchschnittliche Dauer bis zum Eingang der Projektüberschüsse
- Duration hat für Finanzinvestitionen in Anleihen eine ähnliche Bedeutung wie die Amortisation für Realinvestitionen

282

Annahme: Kauf einer Anleihe, d.h. Auszahlung in Höhe des Kurswertes in $t = 0$ und Einzahlungen in Höhe der Zinskupons und der Rückzahlung (= „reine Investition“)

$$D_0 = \frac{1}{K_0^{\text{Einz.}}} \cdot \sum_{t=1}^T \frac{t \cdot e_t}{(1+i)^t}$$

mit $K_0^{\text{Einz.}}$ als Barwert der Einzahlungen.

Zinsreagibilität = Ableitung des Barwerts der Einzahlungen nach dem Zins i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_0^{\text{Einz.}}}{\partial i} &= \sum_{t=1}^T \frac{-t \cdot e_t}{(1+i)^{t+1}} = - \frac{K_0^{\text{Einz.}}}{K_0^{\text{Einz.}} \cdot (1+i)} \cdot \sum_{t=1}^T \frac{-t \cdot e_t}{(1+i)^t} = - \frac{K_0^{\text{Einz.}}}{(1+i)} \cdot \frac{1}{K_0^{\text{Einz.}}} \cdot \sum_{t=1}^T \frac{-t \cdot e_t}{(1+i)^t} \\ &= - \frac{K_0^{\text{Einz.}}}{(1+i)} \cdot D_0 \end{aligned}$$

283

- Sensitivität bei infinitesimal kleinen Veränderungen des Zinses ist direkt proportional zur Duration des Investitionsobjekts
- Reagibilität bei einmaliger Zinsänderung in Form einer Parallelverschiebung der Zinskurve unmittelbar nach $t = 0$ kann wie folgt approximiert werden:

$$\Delta K_0^{\text{Einz.}} \approx - \frac{K_0^{\text{Einz.}}}{(1+i)} \cdot D_0 \cdot \Delta i$$

- Modified Duration

$$\frac{D_0}{(1+i)}$$

- D_0 heißt Macaulay-Duration

284

Beispiel zur Duration als Sensitivitätskennzahl

Festverzinsliches Wertpapier; Zinssatz $i = 5\%$

$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
26,25	22,05	92,61

$$\text{Kurs der Anleihe: } K_0^{\text{Einz.}} = \frac{26,25}{1,05} + \frac{22,05}{1,05^2} + \frac{92,61}{1,05^3} = 125$$

Duration

$$D_0 = \frac{1}{125} \cdot \left(1 \cdot \frac{26,25}{1,05} + 2 \cdot \frac{22,05}{1,05^2} + 3 \cdot \frac{92,61}{1,05^3} \right) = 2,44$$

285

Zinserhöhung um 1% ergibt Kurswertminderung von

$$\Delta K_0^{\text{Einz.}} \approx -\frac{125}{1,05} \cdot 2,44 \cdot 0,01 = -2,90$$

Exakte Berechnung des neuen Kurses bei Zins $i = 6\%$

$$K_0^{\text{Einz.}}(6\%) = \frac{26,25}{1,06} + \frac{22,05}{1,06^2} + \frac{92,61}{1,06^3} = 122,15$$

$$\Delta K_0^{\text{Einz.}} = 122,15 - 125 = -2,85$$

Approximation des Kursverlustes wurde also überschätzt um:

$$\frac{-2,90}{-2,85} - 1 = 1,75\%$$

286

Übungsaufgabe:

Bestimmen Sie zu dem gerechneten Beispiel die Kursänderung bei einer abnormal hohen Zinserhöhung um 5% approximativ nach der Duration und exakt über die Barwertformel. Um wieviel Prozent überschätzt die Duration den Kursverlust?

287

Lösung

Der Kursverlust in einem sehr schlechten Fall bei einer abnormal hohen Zinserhöhung von $\Delta i = 5\%$ beträgt approximativ

$$\Delta K_0^{\text{Einz.}} \approx -\frac{125}{1,05} \cdot 2,44 \cdot 0,05 = -14,52$$

bzw. exakt bei $i = 10\%$ über

$$K_0^{\text{Einz.}}(10\%) = \frac{26,25}{1,10} + \frac{22,05}{1,10^2} + \frac{92,61}{1,10^3} = 111,67$$

gleich: $\Delta K_0^{\text{Einz.}} = 111,67 - 125 = -13,33.$

In diesem Fall wird der Kursverlust um $\frac{-14,52}{-13,33} - 1 = 8,93\%$ überschätzt.

288

Beispiel zur Immunisierung mit Hilfe der Duration

Gegeben: Festverzinsliches Wertpapier; Zinssatz $i = 9\%$

$t = 1$	$t = 2$
10	110

$$K_0^{\text{Einz.}}(9\%) = \frac{10}{1,09} + \frac{110}{1,09^2} = 101,759$$

$$D_0 = \frac{1}{101,759} \cdot \left(1 \cdot \frac{10}{1,09} + 2 \cdot \frac{110}{1,09^2} \right) = 1,910$$

Unmittelbar nach dem Kauf der Anleihe in $t = 0$ kommt es zu einer (Parallel-) Verschiebung der Zinskurve von 9% auf 10%:

289

➤ In $t = 1,910$ ist das Wertpapier gegen Zinsänderungen immunisiert.

- Bei Betrag 110: Kursgewinn in Höhe von 0,090:

$$\frac{110}{1,09^{2-1,910}} = 109,150$$

$$\frac{110}{1,10^{2-1,910}} = 109,060$$

- Bei Betrag 10: Wiederanlageverlust in Höhe von 0,090:

$$10 \cdot 1,09^{1,910-1} = 10,816$$

$$10 \cdot 1,10^{1,910-1} = 10,906$$

290

Übungsaufgabe: Duration

Der BWLer Bilosch Bond hat von seiner Tante 100.000 € geerbt, die er in zwei festverzinsliche Wertpapiere mit einer Laufzeit von vier Jahren investieren kann. Beide Wertpapiere bieten eine Rendite von 6% p.a.. Der erste Titel K ist eine Kuponanleihe mit 6% Kupon, die derzeit mit 1.000 € notiert und in $t = 4$ getilgt wird. Die Anleihe A ist eine Annuitätenanleihe, die in den vier nachfolgenden Jahren zu konstanten Annuitäten führt und derzeit ebenfalls mit 1.000 € notiert wird.

- a) Stellen Sie für jedes Wertpapier die Zahlungsreihe auf!
- b) Wie groß ist die Duration der beiden Zahlungsströme?
- c) B. B. will sich gegen ein eventuelles Zinsänderungsrisiko in $t = 3$ absichern, das durch eine mögliche einmalige Zinsänderung kurz nach der

291

Mittelanlage entstehen kann. Welche Kombination aus K und A muss er erwerben, damit er gegenüber einer solchen Zinsänderung immunisiert ist?

- d) Zeigen Sie, dass die Absicherung der Anlage gegen eine sofortige Zinsänderung von $\pm 1\%$ tatsächlich gegeben ist, indem Sie die entsprechenden Vermögenswerte zum Absicherungszeitpunkt gegenüberstellen!

292

Übungsaufgabe: Zinsrisikomanagement

- a) Erläutern Sie die Begriffe „Spot Rate“ und „Forward Rate“.
- b) An einem vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkt ist es nach Annahme möglich, Zahlungsmittel von $t = 0$ bis $t = 1$ zu 8% und von $t = 1$ bis $t = 2$ zu 15% anzulegen oder aufzunehmen. Geben Sie die auf diesem Kapitalmarkt in den ersten beiden Perioden herrschenden Laufzeitzinssätze und Terminzinssätze an.
- c) Die Duration einer Nullkupon-Anleihe (Zero Bond) entspricht immer der Laufzeit der Anleihe! Zeigen Sie das beispielhaft, in dem Sie die Duration einer Nullkupon-Anleihe mit einem Kurswert $K_0^{Emz.} = 747,26$ und einer Rückzahlung von 1.000,00 in fünf Jahren bei einem Zinsniveau von 6% berechnen.

293

- d) Berechnen Sie die Duration einer Kupon-Anleihe mit der nachfolgenden Zahlungsreihe bei einem Zinsniveau von 6%.

$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
44,84	44,84	44,84	44,84	792,09

294