Übungsaufgabe: Systematisches und unsystematisches Risiko

Folienseite 172

(a) Leiten Sie für die Rendite $R_i = \alpha_i + \beta_i \cdot R_M + \varepsilon_i$ einer Aktie i mit $E(\varepsilon_i) = 0$ den formalen Zusammenhang zwischen Gesamtrisiko (Varianz der Rendite), systematischem und unsystematischem Risiko ab.

(b) Wie hoch ist der Wert $Cov(R_i,R_M)$, wenn das unsystematische Risiko der Aktie gleich Null ist?

(c) Leiten Sie für die Rendite R_P eines Portefeuille P von Aktien mit den in (a) beschriebenen Renditen den formalen Zusammenhang zwischen Gesamtrisiko (Varianz der Portefeuille-Rendite), systematischem und unsystematischem Portefeuille-Risiko ab.

Lösungshinweise

zu (a)

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(R_i\right) &= \operatorname{cov}(R_i, R_i) = \operatorname{cov}(\alpha_i + \beta_i \cdot R_M + \varepsilon_i, \alpha_i + \beta_i \cdot R_M + \varepsilon_i) \\
&= \operatorname{cov}(\alpha_i, \alpha_i) + \operatorname{cov}(\alpha_i, \beta_i \cdot R_M) + \operatorname{cov}(\alpha_i, \varepsilon_i) + \operatorname{cov}(\alpha_i, \beta_i \cdot R_M) + \operatorname{cov}(\beta_i \cdot R_M, \beta_i \cdot R_M) \\
&\quad + \operatorname{cov}(\beta_i \cdot R_M, \varepsilon_i) + \operatorname{cov}(\alpha_i, \varepsilon_i) + \operatorname{cov}(\beta_i \cdot R_M, \varepsilon_i) + \operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_i) \\
&= \beta_i^2 \cdot \operatorname{var}(R_M) + \operatorname{var}(\varepsilon_i)
\end{aligned}$$

zu (b)

$$\operatorname{cov}(R_i, R_M) = \operatorname{cov}(\alpha_i + \beta_i \cdot R_M + \varepsilon_i, R_M) = \operatorname{cov}(\alpha_i, R_M) + \operatorname{cov}(\beta_i \cdot R_M, R_M) + \operatorname{cov}(R_M, \varepsilon_i)$$

$$= \beta_i \cdot \operatorname{var}(R_M) = \beta_i \cdot \sigma_M^2$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_\varepsilon^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2$$

$$\beta_i = \sqrt{\frac{\sigma_i^2}{\sigma_M^2}} = \pm \frac{\sigma_i}{\sigma_M}$$

$$\operatorname{cov}(R_i, R_M) = \beta_i \sigma_M^2 = \pm \sigma_i \cdot \sigma_M$$

zu (c)

$$R_{iP} = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot R_i = \sum_{i=1}^{N} x_i (\alpha_i + \beta_i \cdot R_M + \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i \cdot R_M + \sum_{i=1}^{N} x_i \varepsilon_i$$

$$= \alpha_P + \beta_P \cdot R_M + \varepsilon_P$$

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_\varepsilon^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i \right)^2 + \mathrm{var}(\sum_{i=1}^{N} x_i \varepsilon_i)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i \right)^2 \cdot \mathrm{var}(R_M) + \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \cdot \mathrm{var}(\varepsilon_i)$$

Übungsaufgabe: Delta im Binomialmodell

Folienseite 259; Quelle: Rudolph/Schäfer (2005), S. 297.

Gegeben ist eine dividendenlose Aktie mit dem Kurs 300. Es wird angenommen, dass der Kurs der Aktie pro Periode entweder mit dem Faktor 1,3 steigt oder mit dem Faktor 0,8 fällt. Unterstellt wird ein Kursprozess gemäß eines zweiperiodigen Binomialmodells.

a) Wie hoch ist der theoretische Wert einer europäischen Kaufoption mit dem Basispreis 310, wenn der Marktzins pro Periode 10% beträgt?

b) Wie groß ist das Options-Delta in t = 0? Zeigen Sie, dass das Hedge-Portfolio bei dem von Ihnen berechneten Delta risikofrei ist.

c) Geben Sie die beiden Delta-Werte für die zweite Periode an. Konstruieren Sie entsprechende Arbitrage-Strategien.

zu a) $C_{uu} = 197$, $C_{ud} = 2$, $C_{dd} = 0$, $C_u = 108{,}18$, $C_d = 1{,}09$, $C = 59{,}41$

zu b) Der Delta-Wert der ersten Periode lautet 0,7139. Die Hedge-Strategie ist in Tabelle **L.1** abgebildet.

zu c). Die beiden Delta-Werte für die zweite Periode berechnen sich wie folgt. Die Hedge-Strategien sind in Tabelle **L.2** und Tabelle L.3 abgetragen:

$$\Delta_u^C = \frac{C_{uu}^E - C_{ud}^E}{(u-d)\cdot u \cdot S} = 1$$

$$\Delta_d = \frac{C_{ud}^E - C_{dd}^E}{(u-d)\cdot d \cdot S} = \frac{2-0}{(1{,}3-0{,}8)\cdot 240} = 0{,}0167$$

Tabelle L.1. Delta-Hedging im Übungsbeispiel

Strategie	Zahlungsstrom in $t = 0$	Zahlungsstrom in $t = 1$	
		$d \cdot S = 240$	$u \cdot S = 390$
Kauf Call	– 59,41	+ 1,09	+ 108,18
Verkauf 0,7139 Aktien	+ 214,17	–171,34	–278,42
Geldanlage	– 154,76	+ 170,24	+ 170,24
Summe	0	= 0	= 0

Tabelle L.2. Delta-Hedging für $u \cdot S$ in $t = 1$ im Übungsbeispiel

Strategie	Zahlungsstrom in $t = 1$	Zahlungsstrom in $t = 2$ $d \cdot u \cdot S = 312$	$u \cdot u \cdot S = 507$
Kauf Call	– 108,18	+ 2	+ 197
Verkauf eine Aktie	+ 390,00	– 312	– 507
Geldanlage	– 281,82	+ 310	+ 310
Summe	= 0	= 0	= 0

Tabelle L.3. Delta-Hedging für $d \cdot S$ in $t = 1$ im Übungsbeispiel

Strategie	Zahlungsstrom in $t = 1$	Zahlungsstrom in $t = 2$ $d \cdot d \cdot S = 192$	$d \cdot u \cdot S = 312$
Kauf Call	– 1,09	0	+ 2,00
Verkauf 0,0167 Aktien	+ 4,01	– 3,21	– 5,21
Geldanlage	– 2,92	+ 3,21	+ 3,21
Summe	= 0	= 0	= 0

Übungsaufgabe: Neutrale Strategien

Folienseiten 265-266

Eine Bank ist allgemein sehr erfolgreich beim Verkauf von Wechselkursabsicherungen an ihre Kunden. Sie verfügt deshalb über ein großes USD/EUR-Optionsportefeuille, dessen Risiken sie allerdings nicht gerne tragen möchte. Die Bank hat keine Möglichkeit die Positionen des Optionsportefeuilles durch den Aufbau exakt gegenläufiger Optionspositionen glattzustellen, sie kennt aber die folgenden Optionskennzahlen des Portefeuilles:

Delta: $\Delta_{PF} = -900.000$

Gamma: $\Gamma_{PF} = -50.000$

Lambda: $\Lambda_{PF} = -20.000$

Am Markt wird eine USD/EUR-Option mit einem Delta von 0,35 einem Gamma von 0,8 und einem Lambda von 0,4 gehandelt.

a) Was versteht man hier unter dem Delta-, Gamma- und Lambda-Wert des Portefeuilles?

b) Mit welchen Positionen in der Option und in Euro kann die Bank ein Delta-Gamma-neutrales Portefeuille realisieren?

c) Am Markt existiert eine zweite USD/EUR-Option mit einem Delta von -0,6 einem Gamma von 0,75 und einem Lambda von 0,25. Mit welchen Positionen in den Optionen sowie und in Euro kann die Bank ein Delta-Gamma-Lambda-neutrales Portefeuille realisieren?

zu a) Definitionen/Interpretationen der Zahlen

zu b) Kauf von 62.500 Optionen C1 und Kauf von 878.125 EUR-Positionen

zu c) Kauf von 25.000 Optionen C1 und Kauf von 40.000 Optionen C2 und Kauf von 915.250 EUR-Positionen