

Übungsaufgaben zur Portfolio-Selection-Theorie:

Aufgabe 1

Nachfolgend finden Sie die umweltzustandsabhängigen Renditen der Aktien A und B:

WK	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅
r _A	0,18	0,05	0,12	0,04	0,06
r _B	0,00	-0,03	0,15	0,12	0,01

- Berechnen Sie die Erwartungswerte der Renditen der Aktien A und B.
- Berechnen Sie die Varianzen der Renditen der Aktien A und B.
- Berechnen Sie den Erwartungswert der Portfolio-Renditen für die folgenden fünf vorgegebenen Portfolio-Strukturen:

Portfeuille	1	2	3	4	5
% in Aktie A	125	100	75	50	0
% in Aktie B	-25	0	25	50	100

- Berechnen Sie die Varianz der Portfeuillerenditen für alle fünf Portfolios.

Aufgabe 2

Es gelten die Daten der Aufgabe 1:

- Tragen Sie die $\mu - \sigma$ -Werte der fünf Portfolios aus Aufgabe 1 in ein $\mu_p - \sigma_p$ -Koordinatensystem ein.
- Bestimmen Sie die Anteile a und b sowie Erwartungswert und Standardabweichung des varianzminimalen Portfolios. Berechnen Sie dazu zunächst die Portfoliofunktion $\sigma_p(\mu_p)$.
- Welcher alternative Risikomaßstab erscheint im Portfoliokontext sinnvoll? Berechnen Sie diesen für die Aktien A und B im varianzminimalen Portfolio.
- Welches der effizienten Portfolios sollte ein nutzenmaximierender Anleger, der eine Präferenzfunktion der Form $\Phi(\mu, \sigma) = \mu - 5(\mu^2 + \sigma^2)$ besitzt, realisieren?

Aufgabe 3

Aus den beiden nachfolgend angeführten Wertpapieren ist das Portfolio mit dem kleinstmöglichen Risiko zu bilden:

Umweltzustand	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,7	0,1
r_A	8,0	10,0	11,0
r_B	11,7	13,0	9,6

- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Rendite des varianzminimalen Portfolios.
- Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis an einer grafischen Darstellung der Ertrags- / Risikozusammenhänge

Aufgabe 4

Ein Anleger soll aus den Papieren 1 und 2 ein Portfolio zusammenstellen. Es sei $E(r_1)=0,2$ der Erwartungswert der Rendite des Wertpapiers 1 und $E(r_2)=0,3$ der Erwartungswert der Rendite des Wertpapiers 2. Außerdem gilt $\text{var}(r_1)=0,04$, $\text{var}(r_2)=0,08$ und $\text{cov}(r_1,r_2)=0,02$.

- Berechnen Sie für den Erwartungswert einer Portfoliorendite von 25% die Wertpapieranteile a bzw. b.
- Wie hoch ist die Varianz dieses Portfolios?
- Wie hoch sind die Portfoliorisiken der Wertpapiere 1 und 2 in diesem Portfolio?

Aufgabe 5

Ein Aktienportefeuille P enthält die Wertpapiere A und B im Verhältnis 1:3. Es gelten die folgenden Daten:

$$\begin{aligned} E(r_A) &= 0,10 & E(r_B) &= 0,16 \\ \text{var}(r_A) &= 0,0016 & \text{var}(r_B) &= 0,0025 & \text{cov}(r_A, r_B) &= 0,0012 \end{aligned}$$

- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Rendite des Portefeuilles P.
- Berechnen Sie die Kovarianzen $\text{cov}(r_A, r_P)$ und $\text{cov}(r_B, r_P)$.
- Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus a), indem Sie $\text{var}(r_P)$ aus den in b) ermittelten Kovarianzen berechnen.

- d) Berechnen Sie die Portefeullerisiken der Aktien A und B im Anlegerportefeulle, und vergleichen Sie die Portefeullerisiken mit den Einzelrisiken der Wertpapiere. In welchem Fall gilt allgemein, dass das Portefeullerisiko eines Wertpapiers seinem Einzelrisiko entspricht?
-

Aufgabe 6

Unterstellen Sie nun, dass zusätzlich zu den Daten aus den Aufgaben 1 und 2 eine risikofreie Geldanlage- und Kreditaufnahmemöglichkeit zu $r_f=4\%$ zur Verfügung steht.

- a) Bestimmen Sie die Ertrags-/ Risikocharakteristika des Tangentialportfolios.
- b) Berechnen Sie die Zusammensetzung sowie die Varianz des effizienten Portfolios bei $\mu_p = 5\%$. Vergleichen Sie die Struktur der *riskant investierten* Mittel mit der aus Teilaufgabe a).
- c) Berechnen Sie die Zusammensetzung sowie die Varianz des effizienten Portfolios bei einem Erwartungswert der Portfoliorendite von $\mu_p = 10\%$, und vergleichen Sie die Ertrags- / Risikocharakteristika dieses Portfolios mit denen des effizienten Portfolios P1 aus Aufgabe 2, das eine gleich hohe erwartete Rendite aufweist.
- d) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz des optimalen Portfolios eines Anlegers, der eine Präferenzfunktion der Form $\Phi(\mu, \sigma) = \mu - 5(\mu^2 + \sigma^2)$ besitzt.
-

Aufgabe 7

Am Kapitalmarkt sind zwei Wertpapiere 1 und 2 mit Erwartungswerten der Renditen von 8% und 14% sowie Standardabweichungen der Renditen von 10% und 15% verfügbar. Die Korrelation der beiden Wertpapierrenditen beträgt 0,4. Am Markt gibt es darüber hinaus eine risikofreie Anlagemöglichkeit zu 5%.

- a) Berechnen Sie die Zusammensetzung und die Standardabweichung der Rendite in einem effizienten Portfolio mit dem Erwartungswert von 11%.
- b) Berechnen Sie die Portfoliorisiken der beiden Wertpapiere in diesem Portfolio.
- c) Wie verhalten sich die beiden Portfoliorisiken zueinander?

Aufgabe 8:

Die Erwartungswerte der Renditen der Wertpapiere 1 und 2 seien 25% und 15%, die Standardabweichungen 30% und 10%, die Korrelation betrage $k = -0,2$.

- a) Welche Portefeuilleanteile muss ein Investor in die Wertpapiere 1 und 2 investieren, um das Portefeuille mit der niedrigsten Varianz zu erreichen? Berechnen Sie auch Erwartungswert und Varianz dieses Portefeuilles.
- b) Unterstellen Sie, dass auf dem Kapitalmarkt zusätzlich eine risikofreie Anlage zu 10% existiert. Zeigen Sie, dass der Investor in diesem Fall den gleichen Erwartungswert der Rendite durch Übernahme eines geringeren Risikos erzielen kann. Berechnen Sie hierfür das Risiko des effizienten Portfolios mit dem in Teilaufgabe a) errechneten Erwartungswert der Rendite, und vergleichen Sie es mit dem Risiko des varianzminimalen Portfolios aus Teilaufgabe a).

Aufgabe 9

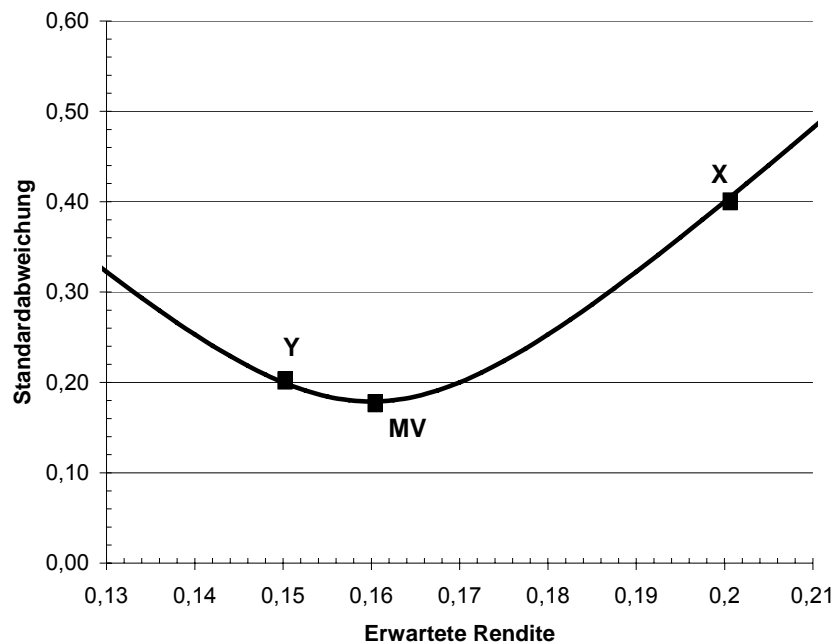
Gegeben sind zwei Wertpapiere X und Y mit $\mu_X=0,20$ und $\sigma_X=0,40$ sowie $\mu_Y=0,15$ und $\sigma_Y=0,20$, die mit positiven Anteilen x_X bzw. x_Y im Portfolio P vertreten sind. Die Korrelation der Renditen wird mit $k_{X,Y}=0$ angegeben.

- a) Berechnen Sie die Portfoliolinie.
- b) Ermitteln Sie das Minimum-Varianz-Portfolio.

Ergänzung (grafische Veranschaulichung):

In der nachfolgenden Abbildung ist die Portfoliolinie als Verbindung der Punkte Y und X erkennbar. Positionen auf der Verlängerung des Kurvenzugs über X oder Y hinaus, sind nur realisierbar, wenn auch negative Anteile von Y bzw. X gehalten werden können, was hier ausgeschlossen wurde. Die Linie verläuft durch den Punkt MV. Dieser stellt unter den möglichen Rendite-Risiko-Kombinationen diejenige mit dem geringstmöglichen Risiko dar. Es ist zugleich diejenige mit der minimalen Varianz, weswegen sie auch als Minimum-Varianz-Portfolio bezeichnet wird.

Abbildung: Portfoliolinie im beispielhaften Zwei-Wertpapier-Fall



Aufgabe 10

Der Nutzen, den der Investor PERF aus der Anlage in Wertpapieren erzielt bestimmt sich in Abhängigkeit von erwarteter Rendite und Risiko des Portfolios gemäß

$$\Phi = \mu - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \sigma^2 \text{ mit } \alpha = 0,75$$

Zur Auswahl stehen alle Rendite-Risiko-Positionen auf der Portfoliolinie

$$\sigma = \sqrt{80 \cdot \mu^2 - 25,60 \cdot \mu + 2,08} \text{ für } 0,15 \leq \mu \leq 0,20$$

Die Positionen ergeben sich aus Mischungen der Wertpapiere X und Y, von denen die erwarteten Renditen mit $\mu_X=0,20$ und $\mu_Y=0,15$ bekannt sind.

- a) Berechnen Sie die optimale Mischung über die Maximierung der Nutzenfunktion unter Berücksichtigung der gegebenen Portfoliofunktion:

Aufgabe 11

Gegeben sind die drei Wertpapiere A, B und C, deren Renditen und Risiken nachfolgend aufgeführt sind. Der findige Investor I bemerkt sofort, dass das Wertpapier A dem Wertpapier B hinsichtlich der Rendite unterlegen, hinsichtlich des Risikos jedoch überlegen ist. Ferner fällt ihm auf, dass das Wertpapier C mit keinerlei Risiken behaftet ist.

	μ_i	σ_i
A	0,15	0,20
B	0,25	0,30
C	0,08	0

Die Korrelationen der Wertpapierrenditen betragen $k_{A,B}=-0,4$, $k_{A,C}=0$ und $k_{B,C}=0$.

- Berechnen Sie die Portfoliofunktion $\sigma_P(\mu_P)$ für Mischungen aus A und B.
- Bestimmen Sie das Minimum-Varianz-Portfolio.
- Wie müssen die Anteile x_A und x_B gewählt werden, falls der Investor I eine Zielrendite von 22% anstrebt?

- Wie sind die Anteile zu wählen, wenn I eine Maximierung seines Nutzens Φ gemäß

$$\Phi = \mu - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \sigma^2$$

mit $\alpha=1,1$ begehrt.

- Bestimmen Sie die Portfoliolinie für Wertpapiermischungen aus A und C.

Aufgabe 12

Die risikoscheuen Investoren ALI, BABA und RÄU verfügen je über 100.000 € und planen die optimale Anlage ihrer Mittel für eine Periode. Hierzu betrachten Sie die Wertpapiere K und L, deren normalverteilte Renditen mit $\mu_K=0,03$ und $\mu_L=0,09$ sowie $\sigma_K=0,26$ und $\sigma_L=0,12$ geschätzt werden. Über die Korrelation $k_{K,L}$ liegen noch keine Angaben vor.

- Erläutern Sie, was im Rahmen der Portfeuilletheorie
 - unter einem dominanten Wertpapier
 - unter effizienten Wertpapiermischungen
 zu verstehen ist.
- Unter welchen Bedingungen lässt sich im Zwei-Wertpapier-Fall trotz der Dominanz eines Wertpapiers ein Diversifikationseffekt erzielen, durch den für das vorliegende Beispiel ein Portfeuilleisiko $\sigma_P < \sigma_L$ erreichbar ist?
- Berechnen Sie für $k_{K,L}=0,6$ die sich ergebende Portfeuillefunktion.

Der Investor ALI hat sich entschieden, ein Portefeullerisiko zu realisieren, das exakt zwischen σ_K und σ_L gelegen ist.

- d) Wie sind hierzu die Mittel anzulegen? Wie beurteilen Sie die Anlageentscheidung?

Übungsaufgaben zum CAPM:

Aufgabe 13

Gehen Sie im folgenden davon aus, dass die Annahmen des CAPM, also insbesondere die formalen Zusammenhänge der Security Market Line, erfüllt sind. In der Tabelle sind einzelne Parameterwerte für Aktien A, B, C und D sowie für das Markt-Portefeuille und die risikofreie Anlage aufgeführt.

Wertpapier	erwartete Rendite	Standardabweichung in %	Korrelation mit Markt-Portefeuille	Beta
A	9,8		0,64	0,8
B		40	0,70	1,4
C	10,6	24		0,9
D				0,0
Markt-Portefeuille	11,0	20	1,0	
risikolose Anlage	5,0			

- Ermitteln Sie – so weit wie möglich – die Werte für die grau unterlegten Felder unter kurzer Angabe des Lösungsweges.
- Sind alle Wertpapiere richtig bewertet?
- Geben Sie mit kurzer Begründung an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.
 - Die Steigung der Kapitalmarktklinie entspricht dem Beta-Faktor des Markt-Portefeuille.
 - Diversifikation verhindert systematische Risiken.
 - Bei Wertpapieren mit hohem Beta sind die beobachteten Renditen immer größer als bei Wertpapieren mit niedrigem Beta.

Aufgabe 14

Die Korrelationskoeffizienten der Aktien A und B mit dem Markt-Portfolio M und die Standardabweichung der Rendite von A und B sind in der nachfolgenden Tabelle angegeben. Die erwartete Rendite von M beträgt 12%, eine risikofreie Anlage verzinst sich mit 5% und die Standardabweichung der Rendite des Markt-Portfolios beträgt 10%.

- Berechnen Sie die Beta-Faktoren und die erwarteten Renditen von A und B.

- b) Berechnen Sie die erwartete Rendite eines Portfolio, das zu gleichen Teilen aus den Aktien A und B besteht, sowie den Beta-Faktor eines solchen Portfolio.

Aktie	Korrelationskoeffizient der Aktie mit dem Markt	Standardabweichung der Rendite der Aktie
A	0,5	25%
B	0,3	30%

Aufgabe 15

- a) Wie hoch ist der Beta-Faktor eines Wertpapiers, dessen Rendite negativ mit der Rendite des Markt-Portefeuille korreliert ist? Was können Sie für eine Aussage über die erwartete Rendite dieses Wertpapiers im Vergleich zu der Rendite einer sicheren Anlage machen?
- b) Ihr Freund, der in der Wertpapierabteilung einer Bank arbeitet, möchte das CAPM gerne mit folgender Beobachtung widerlegen: „Die erwartete Rendite der Aktie der ‘Müller AG’ liegt nach dem CAPM deutlich über der erwarteten Rendite der ‘Fischer AG’, obwohl die ‘Fischer AG’ ‘riskanter’ ist, d.h. die Standardabweichung der Aktie der ‘Müller AG’ mit 10% unter der der Aktie der ‘Fischer AG’ mit 20% liegt.“ Steht diese Beobachtung im Widerspruch zum CAPM?
- c) Ihr Freund wendet weiterhin ein, dass „im vergangenen Jahr die ‘Bio-Tech AG’ an der Börse wesentlich schlechter abgeschnitten hat als die ‘Bank AG’, d.h. die Rendite der Aktie der ‘Bio-Tech AG’ unter der der ‘Bank AG’ lag, obwohl der Beta-Wert der ‘Bio-Tech AG’ mit 2 über dem der ‘Bank AG’ mit 1,2 liegt.“ Steht diese Beobachtung im Widerspruch zum CAPM?

Aufgabe 16

Auf dem Kapitalmarkt existieren zwei Wertpapiere A und B, die die folgenden Risiko-Ertragscharakteristika aufweisen:

$$A: \quad \mu_A = 10\% \quad \sigma_A = 20\%$$

$$B: \quad \mu_B = 15\% \quad \sigma_B = 25\%$$

- a) Nehmen Sie an, dass Sie ein Portfolio besitzen, das zu 35% aus Aktie A und zu 65% aus Aktie B besteht. Bei welcher Korrelation zwischen den Wertpapieren $\rho_{A,B}$ ist die Standardabweichung der Portfolio-Rendite am größten und bei welcher am kleinsten. Berechnen Sie die jeweilige Standardabweichung der Portfolio-Rendite!

- b) Nehmen Sie nun $\rho_{A,B} = 0$ an. Kann in diesem Fall ein Portfolio mit $\mu_p = 14\%$ realisiert werden, wenn nur ein Risiko von $\sigma_p = 20\%$ eingegangen werden soll? Stellen Sie hierzu fest, welches Risiko ein effizientes Portfolio mit $\mu_p = 14\%$ aufweist.

[Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Anteile, die zu einem Erwartungswert von 14% führen und anschließend die Standardabweichung der Portfolio-Rendite.]

- c) Wenn nun zusätzlich eine risikofreie Anlage zu 5% existiert, ist eine Aufteilung der riskant investierten Mittel im Tangentialportfolio von $x_a = 0,438$ und $x_b = 0,562$ optimal. Wie groß ist das dann verbleibende Risiko, das eingegangen werden muss, um $\mu_p = 14\%$ zu erreichen? Bestimmen Sie hierfür zunächst die Effizienzgerade.
- d) Nehmen Sie nun an, dass als riskante Anlagen nur die beiden Wertpapiere A und B auf einem Kapitalmarkt existieren und gilt: $\rho_{A,B} = -1$. Welchen Wert muss der risikofreie Zinssatz in diesem Fall annehmen, wenn alle Marktteilnehmer diese Vorstellungen über die Risiko-Ertragscharakteristika teilen und auch die restlichen Annahmen des CAPM erfüllt sein sollen?

Aufgabe 17

Nehmen Sie an, dass auf einem gleichgewichtigen Kapitalmarkt zwei Wertpapiere A und B existieren, die auf der Wertpapiermarktgeraden liegen. A besitzt bei $\beta = 0,5$ eine Risikoprämie von 4% und B bei $\beta = 1,75$ einen Erwartungswert der Rendite von 20%. Spezifizieren Sie die exakte Form der Wertpapiermarktgerade und beurteilen Sie, ob die folgenden Wertpapiere C und D über- oder unterbewertet sind:

WP C: $\mu_1 = 20\%$; $\beta_1 = 2$;

WP D: $\mu_2 = 14\%$; $\beta_2 = 0,75$!

Ω